Életbiztosítás praktikum 2024

3. alkalom
Díjtartalékok számítása, Zillmerezés

Szepesváry László
Magyar Posta Életbiztosító Zrt.

2024.11.08

A mai óra anyaga

1. Nettó cash flow modellek, a díjtartalék szükségessége
2. A biztosítástechnikai tartalékokról általánosan
   +
   Életbiztosítási díjtartalék kalkulációja
3. A negatív díjtartalék problémája
4. Zillmerezés

Ismétlés az előző óráról

- Nemenkénti és unisex halandóság, kommutációs számok
- A klasszikus díjkalkuláció 3 lépése
  1. Egyszeri nettó díjak számítása ekvivalencia elv alapján
     - Tartam elején fizeti a teljes díjat, költséget nem tartalmaz
     - Kommutációs számok segítségével
  2. Rendszeres (éves és havi) nettó díjak
     - Ötlet: „fordított járadék”, az ügyfél fizet a biztosítónak, amíg életben van
  3. Bruttó díjak számítása
     - Egyszerű megközelítésben, loading alkalmazásával

1. Nettó cash flow modellek, a díjtartalék szükségessége

Nettó cash flow modellek – ekvivalencia egyenlet – 1, 2, múltkori feladatok

1. Készítsük el a kockázati és az elérési biztosítás egyszeri és rendszeres díjas változatának cash flow modelljét a nettó díjkalkuláció paraméterei szerint! Ellenőrizzük az ekvivalencia elv teljesülését!
2. Használjuk az előző modellt a következő biztosítások nettó díjának számításához
   a. Kockázati életbiztosítás,
   b. Kockázati életbiztosítás, ahol a biztosítási összeg 1.000.000 Ft plusz az addig befizetett összes nettó díj,
   c. Kockázati életbiztosítás, ahol a nettó díj és a biztosítási összeg évente 5%-kal indexálódik!

Nettó cash flow modellek – a díjtartalék szükségessége

3. Térjünk vissza a kockázati és az elérési biztosítás cash flow modelljéhez! Hogyan alakul az egyes biztosítási években a bevételek és kiadások várható jelenértéke egymáshoz képest? Kumuláljuk a különbségeket az egyes évekre! Mit tapasztalunk?

- Következtetések
  - **A tartam elején a várható kockázatnál nagyobb díjat szedünk be, a tartam végén pedig kisebbet** (pl. kockázati ÉB). **A különbözetből díjtartalékot kell képezni a későbbi évek kifizetéseire!**
  - VIGYÁZAT! A kumulált oszlop nem a díjtartalék! De ebből is ki lehet számolni (lásd később)!

2. A számviteli biztosítástechnikai tartalékokról általánosan + Életbiztosítási díjtartalék kalkulációja

A biztosítási tartalékokról általánosan

- A jövőbeli kötelezettségekre szükséges fedezet (aminek fedezete nem folyik be a jövőbeli díjakból)
- Egyszerűsítve: Jövőbeli várható kiadások – Jövőbeli várható bevételek
- Számviteli biztosítástechnikai tartalékok típusai
  - Meg nem szolgált díjak tartaléka
  - **Matematikai tartalék** – ennek része az **életbiztosítási díjtartalék**!
  - Függőkár tartalékok – tételes és IBNR
  - Eredménytől függő és független díj-visszatérítési tartalék (2 külön!)
  - Törlési tartalék, Egyéb biztosítástechnikai tartalékok (külön!)
  - **Befektetési egységhez kötött (Unit-linked) életbiztosítások tartaléka**
- **Most csak az életbiztosítási díjtartalékkal foglalkozunk!**

Az életbiztosítási díjtartalék számítása

- Alapgondolat: az ekvivalencia egyenletnek a tartam során végig teljesülnie kell
- Jelölések
  - $B^t{}_1$ - a t időpontig befolyt díj a t időpontra felkamatolva
  - $K^t{}_1$ - a t időpontig fizetett szolgáltatás a t időpontra felkamatolva
  - $B^t{}_2$ - a t időpont és a lejárat közt befolyt díj a t időpontra diszkontálva
  - $K^t{}_2$ - a t időpont és a lejárat közt fizetett szolgáltatás a t időpontra diszkontálva
- Alapegyenlet:

$$B^t{}_1 + B^t{}_2 = K^t{}_1 + K^t{}_2$$

Díjtartalék számítása – prospektív és retrospektív szemlélet

- $$B^t{}_1 + B^t{}_2 = K^t{}_1 + K^t{}_2$$
  $$B^t{}_1 - K^t{}_1 = K^t{}_2 - B^t{}_2$$
- Értelmezés
  - Bal oldal: az eddig befolyt díj mennyivel több, mint a kifizetett szolgáltatás?
  - Jobb oldal: a jövőbeli szolgáltatás mennyivel nagyobb, mint a jövőbeli díj?
  - Mindkét oldal a t időpontbeli tartalékot adja!
- Tartalékszámítás
  - **Prospektív (előretekintő)** – a jobb oldal alapján számítja a tartalékot – **most csak ezzel foglalkozunk!**
  - **Retrospektív (visszatekintő)** – a bal oldal alapján számítja a tartalékot (egy példát látunk majd ilyenre)
  - Ha teljesülnek a kalkuláció feltételei akkor megegyeznek

Díjtartalék számítása prospektív módon 1.

- $K^t{}_2$- $B^t{}_2$
- $K^t{}_2$: a t időpont és a lejárat közt fizetett szolgáltatás a t időpontra diszkontálva. Ez nem lehet más, mint az adott biztosítástípus egyszeri nettó díja (x+t) éves biztosított és (n-t) éves tartam esetén: $A_{x+t:n-t}$
- Miért? Legyen például x=50 (belépési kor), n=15 (teljes tartam). t=10 év után még él a biztosított, mennyi lesz a jövőben várható kiadásunk jelenértéke (t=10-ben)?
  - A biztosított x+t=60 éves, a tartamból hátralévő idő n-t=5 év. A hátralévő 5 évre kell fedezetet nyújtani, azzal a feltétellel, hogy 60 évesen él a biztosított. $K^t{}_2$
  - Adott egy másik egyén, aki ugyanezt a típusú biztosítást szeretné megvásárolni, de belépési életkora 60 év, és 5 éves tartamra köt szerződést. Az egyszeri díja $A_{x+t:n-t}$, ami a jövőbeli kiadások várható jelenértéke.
  - A két esetben megegyeznek a várható pénzáramok, így

$$K^t{}_2 = A_{x+t:n-t}$$

Díjtartalék számítása prospektív módon 2.

- $B^{t}{}_{2}$: a t időpont és a lejárat közt befolyt díj a t időpontra diszkontálva (a t időpontbelit is beleértve). Egyszeri díjas biztosítás esetén ez 0, rendszeres díjas esetben egy (x+t) éves biztosított (m-t) éves járadékbiztosításaként adódik: $\ddot{a}_{x+t:m-t} P_{x:m}$, ahol $P_{x:m}$ a rendszeres díj (m éves díjfizetés esetén!)
- Előbbi a rendszeres díjfizetés díjkalkulációjánál látott logikával adódik
- Emlékeztető: $\ddot{a}_{x:m}$ annak a CF-nek a várható jelenértéke, hogy egy x éves egyén (a 0 időponttól kezdve) minden év elején, m évig, de legfeljebb a haláláig fizet 1 Ft-ot.

Díjtartalék számítása prospektív módon 3.

- Jelölje a t-edik év végén a tartalékot V_t
- A fentiek szerint
  - Egyszeri díjas esetben

$$V_t = A_{x+t:n-t}$$

  - Rendszeres díjas esetben

$$V_t = \begin{cases} A_{x+t:n-t} - \ddot{a}_{x+t:m-t} P_{x:m} & , t \le m \\ A_{x+t:n-t} & , t > m \end{cases}$$

- Segítség a díj -> tartalék képletek átalakításához
  - t=0-ban egyszeri díj $A_{x:n}$. Képletekben: x (kor), n (tartam), x+n (lejárati kor)
  - t-ben egyszeri díjas tartalék $A_{x+t:n-t}$. Képletekben: x+t (kor), n-t (hátralévő tartam), x+n (lejárati kor)
  - **x -> x+t, n -> n-t, x+n -> x+n**

Díjtartalék számítása prospektív módon 4.

- V_t tulajdonságai
  - Tetszőleges biztosítástípus A díjára működik, ahol nem változik a BÖ, a díj stb.
  - V_t - a t-edik év végi tartalék
    - a t időpontbeli rendszeres díjas befizetéseket nem tartalmazza
    - A t időpontbeli kifizetések közül azokat tartalmazza, aminél a biztosítási esemény t-ben következik be. Például elérési biztosítás tartaléka a tartam végén a BÖ, kockázati életbiztosítás tartaléka a tartam végén o.

Feladatok

1. Számítsuk ki a korábban tanult biztosítástípusok tartalékvektorait a tartam éveire! Az egyszeri és a rendszeres díjas esetet is vizsgáljuk!
2. Értelmezzük az eredményeket, a kockázati – elérési – vegyes biztosítás egyszeri és rendszeres tartalékait ábrázoljuk diagramokon is!
3. A kockázati és elérési biztosítás cash flow modelljeiből is számoljuk ki a retrospektív szemléletű tartalékokat és hasonlítsuk össze az eredményeket! **(A zh-n csak a részletesen tanult prospektív módszer kerül számonkérésre.)**

3. A negatív díjtartalék problémája

A negatív díjtartalék problémája

- Tegyük fel, hogy teljesül az ekvivalencia elv a biztosítás nettó díjára (alapértelmezés)
- Emlékeztető
  - $B^t{}_1$ - a t időpontig befolyt díj a t időpontra felkamatolva
  - $K^t{}_1$ - a t időpontig fizetett szolgáltatás a t időpontra felkamatolva
  - $B^t{}_2$ - a t időpont és a lejárat közt befolyt díj a t időpontra diszkontálva
  - $K^t{}_2$ - a t időpont és a lejárat közt fizetett szolgáltatás a t időpontra diszkontálva
- Alapegyenlet (ekvivalencia elv):

$$B^t{}_1 + B^t{}_2 = K^t{}_1 + K^t{}_2$$

A negatív díjtartalék problémája 2.

-

$$B^{t}{}_{1} - K^{t}{}_{1} = K^{t}{}_{2} - B^{t}{}_{2}$$

- Értelmezés
  - Bal oldal: az eddig befolyt díj mennyivel több, mint a kifizetett szolgáltatás?
  - Jobb oldal: a jövőbeli szolgáltatás mennyivel nagyobb, mint a jövőbeli díj?
  - Mindkét oldal a t időpontbeli tartalékot adja!

A negatív díjtartalék problémája 3.

- Mit jelentene a negatív díjtartalék t-ben?
- A bal oldalból kiindulva: $B^t{}_1$ - $K^t{}_1 < 0$, azaz $B^t{}_1 < K^t{}_1$
- A t-ig felmerült kiadások (t-re diszkontált) jelenértéke nagyobb, mint az addigi bevételeké!
- A hiány a jövőben térül majd meg: $K^t{}_2$- $B^t{}_2$
- A biztosító meghitelezi t-ig a többlet kiadást, amit a t után befolyó többlet díjból kap majd vissza
- Mivel lehet probléma?

A negatív díjtartalék problémája 4.

- Probléma: A szerződő törli t-ben a biztosítását – a biztosítónak vesztesége keletkezik!
- Megoldás: Ne konstruáljunk olyan biztosítást, aminek negatív tartalékértéke lenne valamely t időpontban!
  (Megjegyzés: ez nem vonatkozik a „modern” felfogású zillmerezés esetére)
- A problémára van valós példa
  - Hitelfedezeti életbiztosítások
  - BÖ a még nem törlesztett tőke - BÖ csökken a tartam során
  - Tartalék lehet negatív
  - Megoldás: díjfizetési tartam csökkentése

Szorgalmi

- Vizsgáljunk egy csökkenő biztosítási összegű haláleseti biztosítást! (Pl hitelfedezeti biztosítás, 1.500.000, 1.400.000, 1.300.000 stb. a BÖ-k sorozata)
- A nettó cash flow modell segítségével számítsuk ki a biztosítás rendszeres éves díját! Mutassuk meg (alkalmasan választott paraméterekkel), hogy a tartalékvektornak lehetnek negatív elemei!
- Mutassuk meg azt is, hogy a díjfizetési tartam lerövidítésével ($1<m<n$) elkerülhető a negatív tartalék problémája!
- Határidő:?

4. Zillmerezés

Zillmerezés kiváltó oka

- A módszer születésének kiváltó oka egy ütemezési probléma
  - Láttuk: bruttó díj = nettó díj + vállalkozói díjrész. A tartam során (indexálás esetét leszámítva) nem változik.
  - Probléma: a vállalkozói költségek időben nem állandók!
  - A költségek jelentős része a tartam elején merül fel: szerzési jutalék, kockázatelbírálás, orvosi vizsgálat, kötvényesítés
  - Ha ezeket a biztosító meghitelezi az ügyfélnek: törlés miatt veszteség kockázata fent áll (későbbi vállalkozói díjakból nem jön vissza a kölcsön)
- Megoldás
  - Láttuk: nettó díj nagyobb a tartam elején, mint amit a kockázatra fizetni kell -> tartalék
  - Ötlet (Zillmer): vegyünk kölcsön az első évi nettó díjból (kevesebb tartalék lesz) és a későbbi vállalkozói díjakból törlesszük majd

Zillmerezés konzervatív felfogásban

- Jelölések
  - Nem zillmerezett eset
    - P – nettó díj
    - BP – bruttó díj, $BP = P * (1 + \lambda)$, $VP = BP - P$ a vállalkozói díjrész
    - V_t - tartalék a t év végén
  - Zillmerezett eset
    - P_1 – nettó díj az 1. évben, PZ – nettó díj a többi évben. Teljesül: $P_1 < P < PZ$
    - BP – bruttó díj, $BP - P_1$, $BP - PZ$ a vállalkozó díjrészek (mekkorák?)
    - $V^z{}_t$ - zillmerezett tartalék a t év végén, $V^z{}_t \leq V_t$

Zillmerezés konzervatív felfogásban 2.

- Jelölje p az első évben (az első évi kockázatra) szükséges minimális nettó díjat
  - Kockázati $p = q_x v \quad (\text{vagy} \quad p = q_x \sqrt{v})$
  - Elérési $p = 0$
  - Vegyes $p = q_x v \quad (\text{vagy} \quad p = q_x \sqrt{v})$
  - Whole life $p = q_x v \quad (\text{vagy} \quad p = q_x \sqrt{v})$
  - Term fix $p = q_x v^n$
  - Időleges járadék $p = 1$
  - Életjáradék $p = 1$

Zillmerezés konzervatív felfogásban 3.

- Legyen $P_1 \geq p \quad (p \leq P_1 < P < PZ)$ (Szabadon választható? Más korlát nincs?)
- Igaz lesz (ekvivalencia elv): $P_1 + PZ(\ddot{a}_{x:m} - 1) = A_{x:n}$, amiből
$$PZ = \frac{A_{x:n} - P_1}{\ddot{a}_{x:m} - 1}$$
  - A zillmerezett díjtartalék pedig a prospektív képlet alapján

$$V^z{}_t = \begin{cases} A_{x:n} - P_1 - (\ddot{a}_{x:m} - 1)PZ\ , & t = 0 \\ A_{x+t:n-t} - \ddot{a}_{x+t:m-t}PZ\ , & 0 < t \leq m \\ A_{x+t:n-t}\ , & t > m \end{cases}$$

- Áttérés a tankönyvi jelölésre (z-vel): lásd az Excelben

Zillmerezés konzervatív felfogásban 4.

- Milyen korlátot kell még figyelembe venni?
  - $BP - PZ \geq 0$! A vállalkozói díj a 2. évtől kezdve nem lehet negatív! Így $P_1 = p$, csak megfelelően nagy loading esetén választható! Ha nem teljesül solverezzünk!
- **Feladat:** számítsuk ki a zillmerezett díjakat, tartalékokat a korábbi biztosítástípusokra, úgy hogy az 1. évben a maximális összeget vesszük kölcsön az ügyféltől a kezdeti költségekre! Hasonlítsuk össze a zillmerezett és a zillmerezés nélküli tartalékokat!

Köszönöm a figyelmet!