

1. Beugró tételek

1.1. Tétel (Fourier-sorok főtétele). *Legyen H Hilbert-tér, $(e_n) \subset H$ TONR. Ekkor tetszőleges $x \in H$ elem Fourier-sora konvergens és összege x .*

1.2. Tétel (Riesz-féle reprezentációs tétel). *Legyen H Hilbert-tér. Ekkor minden $\phi : H \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos lineáris funkcionálhoz létezik egyetlen olyan $y \in H$, hogy $\phi = \phi_y$ azaz*

$$\phi x = \langle x, y \rangle \quad (\forall x \in H) \quad (1)$$

1.3. Tétel (Hahn-Banach tétel). *Legyen X normált tér, $X_0 \subset X$ altér, $\phi : X_0 \rightarrow \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál.*

Ekkor létezik ϕ -nek az egész térre való folytonos lineáris kiterjesztése, azaz olyan $\hat{\phi} : X \rightarrow \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál, melyre $\hat{\phi}|_{X_0} = \phi$. Sőt, ez megadható normatartó módon is, azaz $\|\hat{\phi}\| = \|\phi\|$

1.4. Tétel (A Banach-Steinhaus-tétel következménye). *Legyen X Banach-tér Y normált tér, valamint $A_n, A \in B(X, Y)$ ($n \in \mathbb{N}^+$). Ekkor*

$$A_n \rightarrow A \text{ pontonként } X\text{-en} \Leftrightarrow \begin{cases} a) \text{ van olyan } M \subset X \text{ totális rendszer, hogy} \\ \quad A_n x \rightarrow Ax \quad (\forall x \in M); \\ b) (A_n) \text{ egyenletesen korlátos.} \end{cases}$$

1.5. Tétel (Banach-féle homeomorfizmus-tétel). *Legyenek X, Y Banach-terek, $A \in B(X, Y)$ bijekció. Ekkor $A^{-1} \in B(Y, X)$.*

1.6. Tétel (Megoldhatósági tételek: 1 (egyenletesen pozitív eset)). *Legyen $A \in B(H)$ egyenletesen pozitív operátor, azaz A önadjungált és létezik $m > 0$, hogy $\langle Ax, x \rangle \geq m\|x\|^2$ ($\forall x \in H$).*

Ekkor bármely $b \in H$ esetén az $Ax = b$ egyenletnek létezik egyetlen $x^ \in H$ megoldása.*

1.7. Tétel (Megoldhatósági tételek: 2 (koercív eset)). *Legyen $A \in B(H)$ koercív operátor. Ekkor bármely $b \in H$ esetén az $Ax = b$ egyenletnek létezik egyetlen $x^* \in H$ megoldása.*

1.8. Lemma (Lax-Milgram-lemma (valós tér, koercív eset)).

Legyen H valós Hilbert-tér, $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, koercív bilineáris forma. Ekkor bármely $\phi : H \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos lineáris funkcionálhoz létezik egyetlen olyan $u \in H$, melyre

$$B(u, v) = \phi v \quad (\forall v \in H)$$

1.9. Tétel (Kompakt önadjungált operátorok főtétele). *Legyen H Hilbert-tér, $A \in B(H)$ kompakt önadjungált operátor.*

Ekkor $\sigma(A)$ megszámlálható, és $\sigma(A) \setminus \{0\}$ csak sajátértékekből áll, melyek csak a 0-ban torlódhatnak. A $\lambda \neq 0$ sajátértékek rangja (azaz a $\ker(A - \lambda I)$ sajátaltér dimenziója) véges.

Ha H szeparábilis, akkor a sajátvektorokból teljes ortonormált rendszer választható H -ban.