

Sztochasztikus folyamatok előadás

2025.02.13.

- $B = (B_t)_{t \geq 0}$ Brown mozgás (más néven Wiener folyamat), ha nullából induló, folytonos trajektóriájú, független növekményű folyamat, mire $0 \leq s \leq t$ esetén $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$.

Szemléletes kép: Olyan mint egy szimmetrikus bolyongás az $\sqrt{\Delta t} \mathbb{Z}$ rácson, ahol a lépések Δt időközönként történnek.

Tétel (Donsker tétel)

S_n szimmetrikus bolyongás, $S_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}$. Ekkor nagy n -re $S^{(n)}$ eloszlása „közel van” a Brown mozgás eloszlásához.

Definíció (Brown mozgás)

$B = (B_t)_{t \geq 0}$ Brown mozgás, ha nullából induló, folytonos trajektóriájú, független növekményű folyamat, melyre $0 \leq s \leq t$ esetén $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$.

- $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_r$ esetén $X_k = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$, $k = 1, \dots, r$ független egy dimenziós normálisok, ezért $X = (X_1, \dots, X_r)$ normális vektorváltozó.
- $Y = (B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_r}) = AX$ alakú, $A_{i,j} = 1$, ha $j \leq i$, így Y is normális eloszlású vektor.

Definíció

$X = (X_t)_{t \in I}$ **Gauss** folyamat, ha tetszőleges $r \geq 1$, $t_1, \dots, t_r \in I$ esetén $(X_{t_1}, \dots, X_{t_r})$ normális eloszlású vektor változó.

Röviden: X Gauss folyamat, ha a véges dimenziós eloszlásai normálisak.

Példa. Ha B Brown mozgás, akkor Gauss folyamat.

Definíció (Brown mozgás)

$B = (B_t)_{t \geq 0}$ Brown mozgás, ha nullából induló, folytonos trajektóriájú, független növekményű folyamat, melyre $0 \leq s \leq t$ esetén $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$.

X Gauss folyamat, ha a véges dimenziós eloszlásai normálisak.

Állítás

$B = (B_t)_{t \geq 0}$ pontosan akkor Brown mozgás, ha B nullából induló, folytonos trajektóriájú Gauss folyamat, melyre $\mathbb{E}(B_t) = 0$ és $\text{cov}(B_s, B_t) = \min(s, t)$.

$\Rightarrow$. Láttuk, hogy egy Brown mozgás Gauss folyamat. Csak $\mathbb{E}(B_t)$, $\text{cov}(B_s, B_t)$ a kérdés.

$B_t = B_t - B_0 \sim N(0, t)$, azaz $\mathbb{E}(B_t) = 0$.

$0 \leq s \leq t$ -re $B_s = B_s - B_0$ és $B_t - B_s$ függetlenek, azaz $\text{cov}(B_s, B_t) = \text{cov}(B_s, B_t - B_s) + \mathbb{D}^2(B_s) = s$.

Definíció (Brown mozgás)

$B = (B_t)_{t \geq 0}$ Brown mozgás, ha nullából induló, folytonos trajektóriájú, független növekményű folyamat, melyre $0 \leq s \leq t$ esetén $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$.

X Gauss folyamat, ha a véges dimenziós eloszlásai normálisak.

Állítás

$B = (B_t)_{t \geq 0}$ pontosan akkor Brown mozgás, ha B nullából induló, folytonos trajektóriájú Gauss folyamat, melyre $\mathbb{E}(B_t) = 0$ és $\text{cov}(B_s, B_t) = \min(s, t)$.

$\Leftarrow$. Független növekményűséget, és a növekmény eloszlását kell ellenőrizni

- $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_r$. $X = (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_r} - B_{t_{r-1}})$ az $Y = (B_{t_1}, \dots, B_{t_r})$ normális eloszlású vektorváltozó lineáris képe $X = AY$, ahol $A_{i,j} = \mathbb{1}_{(i=j)} - \mathbb{1}_{(i=j+1>1)}$.
- Normális vektorváltozó koordinátái függetlenek $\iff$ korrelálatlanok. $i < j$ -re $t_{i-1} < t_i \leq t_{j-1} < t_j$ és $\text{cov}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}, B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) = \text{cov}(B_{t_i}, B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) - \text{cov}(B_{t_{i-1}}, B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) = (t_i - t_i) - (t_{i-1} - t_{i-1}) = 0$.
- $s \leq t$. $B_t - B_s$ normális változó. $\mathbb{E}(B_t - B_s) = 0$,
 $\mathbb{D}^2(B_t - B_s) = \text{cov}(B_t, B_t) - 2\text{cov}(B_t, B_s) + \text{cov}(B_s, B_s) = t - s$.

Tétel

B Brown mozgás, $c \neq 0$ és $X_t = cB_{t/c^2}$. Ekkor X szintén Brown mozgás.

- Kell: X nullából induló, folytonos trajektóriájú Gauss folyamat, nulla várható értékkel és $\text{cov}(X_s, X_t) = \min(s, t)$ kovariancia függvénnyel.
- $X_0 = cB_0 = 0$, X folytonossága is világos.
- $t_1 < \dots < t_r$ esetén $(X_{t_1}, \dots, X_{t_r})$ a $(B_{t_1/c^2}, \dots, B_{t_r/c^2})$ normális vektorváltozó lineáris függvénye, így normális eloszlású.
- $\mathbb{E}(X_t) = c\mathbb{E}(B_{t/c^2}) = 0$
- $0 \leq s \leq t$ -re

$$\text{cov}(X_s, X_t) = \text{cov}(cB_{s/c^2}, cB_{t/c^2}) = c^2 \min(s/c^2, t/c^2) = \min(s, t).$$

X folytonos trajektóriájú folyamat.

- $\sigma(X) = \sigma\{X_t : t \geq 0\}$. $A \in \sigma(X)$, akkor $A = \{X \in H\}$ alkalmas $H \subset C[0, \infty)$ -vel.
pl. $A = \{\max_{s \leq 1} X_s > 1\}$ esetén H azokból a folytonos függvényekből áll, amiknek a maximuma $[0, 1]$ nagyobb, mint 1.
- Bevezethető egy $\mathcal{B}$ σ -algebra a $C[0, \infty)$ alaphalmazon, amire $A \in \sigma(X)$ pontosan akkor, ha $A = \{X \in H\}$, valamely $H \in \mathcal{B}$ -re.
- X eloszlása Q_X valószínűségi mérték $\mathcal{B}$ -n, $Q_X(H) = \mathbb{P}(X \in H)$.
- X, Y folytonos trajektóriájú folyamatok, $X \stackrel{d}{=} Y$, ha $\mathbb{P}(X \in H) = \mathbb{P}(Y \in H)$, minden $H \in \mathcal{B}$ -re.
- $\underline{t} = (t_1, \dots, t_r)$ esetén $X_{\underline{t}} = (X_{t_1}, \dots, X_{t_r})$. $Q_{X_{\underline{t}}}$ az $X_{\underline{t}}$ -hez tartozó véges dimenziós eloszlása.

Tétel (bizonyítás nélkül)

Ha az X és Y folytonos folyamatok véges dimenziós eloszlásai azonosak, akkor X és Y azonos eloszlású.

Azaz, ha minden $\underline{t}$ -re $X_{\underline{t}} \stackrel{d}{=} Y_{\underline{t}}$, akkor $X \stackrel{d}{=} Y$.

Következmény

Ha X, Y Brown mozgások, akkor $X \stackrel{d}{=} Y$.

Tétel (Skála invariancia)

B Brown mozgás, $c \neq 0$ és $X_t = cB_{t/c^2}$. Ekkor X szintén Brown mozgás.

Definíció

$S_t = \max_{s \leq t} B_s$. S a B Brown mozgás futó maximuma.

- $c = -1$ -gyel, ha $X_t = -B_t$, akkor X is Brown mozgás, azaz $B \stackrel{d}{=} -B$.

$$\max_{s \leq t} B_s \stackrel{d}{=} \max_{s \leq t} -B_s = -\min_{s \leq t} B_s$$

Több is igaz. $-S$ ugyanolyan eloszlású, mint a futó minimum.

- $c > 0$. $X_t = cB_{t/c^2}$, $t \geq 0$

$$S_t \stackrel{d}{=} \max_{s \leq t} X_t = \max_{s \leq t} cB_{s/c^2} = c \max_{u \leq t/c^2} B_u = cS_{t/c^2}$$

azaz minden $t \geq 0$ -ra $S_t \stackrel{d}{=} \sqrt{t}S_1$.

Az nem igaz, hogy S ugyanolyan eloszlású lenne, mint a $(\sqrt{t}S_1)_{t \geq 0}$ folyamat. Csak az egy dimenziós peremeloszlások azonosak.

Tétel (Skála invariancia)

B Brown mozgás, $c \neq 0$ és $X_t = cB_{t/c^2}$. Ekkor X szintén Brown mozgás.

Definíció (Szintelésési idő)

$m_c = \inf\{t \geq 0 : B_t = c\}$ ($m_c = \infty$ ha B nem éri el a c szintet).

Állítás

$$m_c \stackrel{d}{=} c^2 m_1.$$

- $c = 0$ -ra nyilvánvaló: $m_0 = 0$ és $0m_1 = 0$
- $c \neq 0$, $X_t = cB_{t/c^2}$ ($t \geq 0$), $\tilde{m}_c = \inf\{t \geq 0 : X_t = c\}$.
- $B \stackrel{d}{=} X \implies m_c \stackrel{d}{=} \tilde{m}_c$, azaz

$$m_c \stackrel{d}{=} \tilde{m}_c = \inf\{t \geq 0 : cB_{t/c^2} = c\} = \inf\{t \geq 0 : B_{t/c^2} = 1\} = \inf\{c^2 s \geq 0 : B_s = 1\} = c^2 m_1.$$

Állítás (Előző diáról)

$m_c \stackrel{d}{=} c^2 m_1$, ahol $m_c = \inf\{t \geq 0 : B_t = c\}$ ($m_c = \infty$ ha B nem éri el a c szintet).

- Tetszőleges $c \neq 0$ -ra $\mathbb{P}(m_c < \infty) = \mathbb{P}(m_1 < \infty)$.

-

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{m_{1/n} < \infty\} = \{B \text{ jár a pozitív oldalon.}\}$$

- $0 < c < d$ -re $\{m_d < \infty\} \subset \{m_c < \infty\}$, azaz $A_n = \{m_{1/n} < \infty\}$ bővülő eseménysorozat és

$$\mathbb{P}(B \text{ jár a pozitív oldalon.}) = \mathbb{P}(\cup_n A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(m_1 < \infty)$$

- Tetszőleges $c \neq 0$ -ra a B Brown mozgás pontosan akkora valószínűséggel éri el a c szintet, mint amekkora valószínűséggel a pozitív oldalon jár.
- Később látjuk, hogy ez a valószínűség egy.

Állítás

B Brown mozgás.

$$X_t = \begin{cases} tB_{1/t} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}.$$

Ekkor X Brown mozgás.

- $X_0 = 0$, X trajektóriája a $(0, \infty)$ nyílt félegyenesen folytonos.
- X Gauss folyamat: mert $(X_{t_1}, \dots, X_{t_r})$ a $(B_{1/t_1}, \dots, B_{1/t_r})$ normális vektorváltozó lineáris függvénye.
- $\mathbb{E}(X_t) = t\mathbb{E}(B_{1/t}) = 0$, ha $t > 0$, és $\mathbb{E}(X_0) = 0$.
- $\text{cov}(X_0, X_t) = 0 = \min(t, 0)$. Ha $0 < s, t$, akkor

$$\text{cov}(X_s, X_t) = \text{cov}(sB_{1/s}, tB_{1/t}) = st \text{cov}(B_{1/s}, B_{1/t}) = st \min(1/s, 1/t) = \min(t, s)$$

- Ha a trajektóriák a $t = 0$ -ban is folytonosak, akkor X Brown mozgás.
- Ötlet. $\{X_t : t > 0\} \stackrel{d}{=} \{B_t : t > 0\}$ mert $(0, \infty)$ -n folytonos Gauss folyamatok, azonos várható érték és kovariancia függvénnyel.

Ezért $\mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow 0} X_t = 0) = \mathbb{P}(\lim_{t \rightarrow 0} B_t = 0) = 1$.