

Sztochasztikus folyamatok előadás

2025.03.05.

Definíció

A φ folyamat egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha φ az $\mathcal{F}$ filtrációhoz adaptált, korlátos folyamat és létezik $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_r$ úgy, hogy $\varphi = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$.

B Brown mozgás, φ egyszerű integrandus az $\mathcal{F}$ filtrációban. $I_t(\varphi) = \sum_i \varphi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t})$.

Jelölés: $\mathcal{E}$ az $\mathcal{F}$ filtrációban egyszerű integrandusok halmaza.

Állítás

$I_t : \mathcal{E} \rightarrow L^2(\Omega)$ jól definiált, lineáris és teljesíti az Itô izometriát:

$$\mathbb{E}(I_t^2(\varphi)) = \int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2) ds, \quad \text{vagy ugyanez más jelöléssel} \quad \|I_t(\varphi)\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times [0, t])}$$

$\varphi \in \mathcal{E}$ esetén az $I(\varphi) = (I_t(\varphi))_{t \geq 0}$ folyamat nullából induló, folytonos trajektóriájú, négyzetesen integrálható martingál.

Emlékeztető. $L^2(\Omega)$ teljes, azaz ha $(X_n) \subset L^2(\Omega)$ Cauchy sorozat ($\lim_{m,n \rightarrow \infty} \mathbb{E}((X_n - X_m)^2) = 0$), akkor létezik L^2 -beli limesze, azaz létezik $X \in L^2(\Omega)$, amire $\mathbb{E}((X_n - X)^2) \rightarrow 0$.

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban. B és $\mathcal{F}$ adott, minden fogalom ezekre vonatkozik. $\mathcal{E}$ az egyszerű integrandusok halmaza.

Definíció

$\mathcal{S} = \{ \varphi : \varphi \text{ progresszíven mérhető és minden } t \geq 0\text{-ra } \int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2) ds < \infty \}$

$\varphi^{(n)}$ **közelítő sorozat** φ -hez ha $\|\varphi - \varphi^{(n)}\|_{L^2(\Omega \times [0,t])} \rightarrow 0$ minden t -re.

Állítás (Indoklás később)

Ha $\varphi \in \mathcal{S}$, akkor létezik $\varphi^{(n)} \in \mathcal{E}$ közelítő sorozat φ -hez.

Ha $\varphi^{(n)} \in \mathcal{E}$ közelítő sorozat φ -hez, $t \geq 0$, akkor az $I_t(\varphi^{(n)})$ integrálok $L^2(\Omega)$ -ban konvergálnak és a limesz nem függ a közelítő sorozat választásától.

Definíció

$\varphi \in \mathcal{S}$, $t \geq 0$.

$I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dB_s = \lim I_t(\varphi^{(n)})$, ahol $\varphi^{(n)} \in \mathcal{E}$ közelítő sorozat φ -hez és a limesz L^2 -ben értendő.

Definíció

$$\mathcal{S} = \{\varphi : \varphi \text{ progresszíven mérhető és minden } t \geq 0\text{-ra } \int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2) ds < \infty\}$$

$\varphi : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ progresszíven mérhető az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha minden $T > 0$ -ra a $(\omega, t) \mapsto \varphi_t(\omega) \mathbb{1}_{t \leq T}$ leképezés $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}([0, \infty))$ mérhető.

- Ha φ progresszíven mérhető, akkor φ trajektóriájának $[0, T]$ -be eső darabja a T -ben rendelkezésre álló információból kiszámítható, φ „nem előretekintő”, „non-anticipating”.
- Hasonló az adaptáltsághoz, de annál erősebb. Pl. adaptáltságból nem következik a trajektóriák mérhetősége, progresszív mérhetőségből igen.
- φ progresszíven mérhető. Tetszőleges c -re $\{\varphi < c\} = \{(\omega, t) \in \Omega \times [0, \infty) : \varphi_t(\omega) < c\}$ -re $\{\varphi < c\} \cap (\Omega \times [0, T])$ „összerakható” $A \times I$ alakú halmazokból, megszámlálható műveletek segítségével.
- Ha φ progresszíven mérhető, akkor $A_t = \int_0^t \varphi_s^2 ds$ adaptált folytonos trajektóriájú folyamat. Ez a Fubini tétel következménye.

Állítás (Definíció következménye)

Ha φ progresszíven mérhető az $\mathcal{F}$ filtrációban, akkor adaptált $\mathcal{F}$ -hez.

Definíció

$\varphi : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ progresszíven mérhető az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha minden $T > 0$ -ra a $(\omega, t) \mapsto \varphi_t(\omega) \mathbb{1}_{t \leq T}$ leképezés $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}([0, \infty))$ mérhető.

- φ determinisztikus, (Borel) mérhető. Ekkor φ progresszíven mérhető.
- φ folytonos trajektóriájú, adaptált $\mathcal{F}$ -hez. Ekkor φ progresszíven mérhető.
- $\varphi^{(n)} = \sum_k \varphi_{\frac{k}{n}} \mathbb{1}_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})}$.

$$\{\varphi^{(n)} \in H\} \cap (\Omega \times [0, T]) = \bigcup_{k: k \leq nT} \{\varphi_{\frac{k}{n}} \in H\} \times \left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right) \cap [0, T] \right) \in \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}([0, \infty)).$$

$\varphi^{(n)}$ progresszíven mérhető

- $\varphi = \lim \varphi^{(n)}$, így $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B} \sim \varphi^{(n)} \mathbb{1}_{[0, T]} \rightarrow \varphi \mathbb{1}_{[0, T]}$. φ teljesíti a progresszív mérhetőség definícióját.
- A gondolatmenet apró módosításával, **ha φ adaptált és trajektóriái jobbról folytonosak, akkor φ progresszíven mérhető. Ha φ adaptált és trajektóriái balról folytonosak, akkor φ progresszíven mérhető.**
- φ progresszíven mérhető, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel mérhető. Ekkor $g(\varphi)$ is progresszíven mérhető.

Példa. B Brown mozgás, $\mathcal{F}$ -ben. B folytonos trajektóriájú adaptált. B progresszíven mérhető, $\text{sign}(B)$ is az.

Definíció

- $\varphi : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ progresszíven mérhető az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha minden $T > 0$ -ra a $(\omega, t) \mapsto \varphi_t(\omega) \mathbb{1}_{t \leq T}$ leképezés $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}([0, \infty))$ mérhető.
- $\mathcal{S} = \{ \varphi : \varphi \text{ progresszíven mérhető és minden } t \geq 0\text{-ra } \int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2) ds < \infty \}$
- $\varphi^{(n)}$ **közelítő sorozat** φ -hez, ha $\|\varphi - \varphi^{(n)}\|_{L^2(\Omega \times [0, t])} \rightarrow 0$ minden t -re.
- $\varphi \in \mathcal{S}$, $t \geq 0$. $I_t(\varphi) = \lim I_t(\varphi^{(n)})$, ahol $\varphi^{(n)} \in \mathcal{E}$ közelítő sorozat φ -hez és a limesz L^2 -ben értendő.

Állítás (Integrál legfontosabb tulajdonságai)

- $\varphi \in \mathcal{S}$, $I_t(\varphi)$ jól definiált. $\varphi \mapsto I(\varphi)$ lineáris.
- $I(\varphi)$ definiálható, folytonos trajektóriájú folyamatként. Mindig ezt a változatot értjük integrál alatt.
- $I(\varphi)$ nullából induló, folytonos trajektóriájú, négyzetesen integrálható martingál. Itô izometria:

$$\|I_t(\varphi)\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega \times [0, t])}, \quad \text{más jelöléssel} \quad \mathbb{D}^2(I_t(\varphi)) = \mathbb{E}(I_t^2(\varphi)) = \int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2) ds$$

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban. $\varphi \in \mathcal{S}$ -re $I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dB_s$.

Állítás

$$\varphi, \psi \in \mathcal{S}, \operatorname{cov}(I_t(\varphi), I_s(\psi)) = \int_0^{s \wedge t} \mathbb{E}(\varphi_u \psi_u) du.$$

- $0 \leq s \leq t$ feltehető. $I(\varphi)$ martingál az $\mathcal{F}$ filtrációban.

$$\operatorname{cov}(I_t(\varphi), I_s(\psi)) = \mathbb{E}(I_t(\varphi)I_s(\psi)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(I_t(\varphi)I_s(\psi) \mid \mathcal{F}_s)) = \mathbb{E}(I_s(\varphi)I_s(\psi)).$$

- Izometriát felírva $I_s(\varphi \pm \psi)$ -re

$$\mathbb{E}(I_s(\varphi)I_s(\psi)) = \frac{1}{4}\mathbb{E}(I_s^2(\varphi + \psi) - I_s^2(\varphi - \psi)) = \frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\int_0^s (\varphi + \psi)_u^2 - (\varphi - \psi)_u^2 du\right) = \int_0^s \mathbb{E}(\varphi_u \psi_u) du$$

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban. $\varphi \in \mathcal{S}$ -re $I_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s dB_s$.

Állítás

$$\varphi, \psi \in \mathcal{S}, \operatorname{cov}(I_t(\varphi), I_s(\psi)) = \int_0^{s \wedge t} \mathbb{E}(\varphi_u \psi_u) du.$$

Következmény

$\varphi \in \mathcal{S}, T \geq 0$. Ekkor $\varphi \mathbb{1}_{[0,T]} \in \mathcal{S}$ és $I_{t \wedge T}(\varphi) = I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0,T]})$.

$(\omega, t) \mapsto \mathbb{1}_{[0,T]}$ progresszíven mérhető, $\varphi \mathbb{1}_{[0,T]}$ és $\int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2 \mathbb{1}_{[0,T]}) ds \leq \int_0^t \mathbb{E}(\varphi_s^2) ds$.

$$\mathbb{E}((I_{t \wedge T}(\varphi) - I_t(\varphi \mathbb{1}_{[0,T]}))^2) = \mathbb{E}\left(\int_0^{t \wedge T} \varphi_u^2 du - 2 \int_0^{(t \wedge T) \wedge t} \varphi_u \varphi_u \mathbb{1}_{(u \leq T)} du + \int_0^t \varphi_u^2 \mathbb{1}_{(u \leq T)} du\right) = 0.$$

Determinisztikus integrandus integrálja, Wiener integrál

- φ determinisztikus, $\int_0^t \varphi_s^2 ds < \infty$ minden t -re. Ekkor $\varphi \in \mathcal{S}$.
- $\varphi^{(n)} \in \mathcal{E}$ közelítő sorozat φ -hez. Feltehető, hogy $\varphi^{(n)}$ is determinisztikus, mert $\tilde{\varphi}^{(n)} = (\mathbb{E}(\varphi_t^{(n)}))_{t \geq 0}$ egyszerű és közelítő sorozat φ -hez.

$$\varphi^{(n)} = \sum_i \varphi_{t_i}^{(n)} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})} \implies \tilde{\varphi}^{(n)} = \sum_i \mathbb{E}(\varphi_{t_i}^{(n)}) \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$$

$$\left(\varphi_t - \mathbb{E}(\varphi_t^{(n)})\right)^2 \leq \mathbb{E}\left(\left(\varphi_t - \varphi_t^{(n)}\right)^2\right) \implies \int_0^t \left(\varphi_s - \tilde{\varphi}_s^{(n)}\right)^2 ds \leq \int_0^t \mathbb{E}\left(\left(\varphi_s - \varphi_s^{(n)}\right)^2\right) ds \rightarrow 0$$

- Ha $\psi = \sum_{i=0}^{r-1} \psi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$ egyszerű, determinisztikus, akkor

$$I_t(\psi) = \sum_i \psi_{t_i} (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}) \sim N(0, \int_0^t \psi_s^2 ds)$$

- Ha $\|\varphi - \varphi^{(n)}\|_{L^2(\Omega \times [0, n])} < 2^{-n}$, akkor $I_t(\varphi^{(n)}) \rightarrow I_t(\varphi)$ egy valószínűséggel, ahol $I_t(\varphi^{(n)}) \sim N(0, \sigma_n^2)$
 $\sigma_n^2 = \|\varphi^{(n)}\|_{L^2([0, t])}^2$ és $\sigma_n^2 = \|\varphi^{(n)}\|_{L^2([0, t])}^2 \rightarrow \|\varphi\|_{L^2([0, t])}^2 = \sigma^2$.

$$\mathbb{E}(e^{i\alpha I_t(\varphi)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(e^{i\alpha I_t(\varphi^{(n)})}) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 \sigma_n^2} = e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 \sigma^2} \implies I_t(\varphi) \sim N(0, \sigma^2)$$

Ha $\varphi \in \mathcal{S}$ determinisztikus, akkor $I_t(\varphi) \sim N(0, \|\varphi\|_{L^2([0, t])}^2)$.

- B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban.
- Ha $h \in L^2[0, \infty)$, azaz $\int_0^\infty h(s)^2 ds < \infty$, akkor h determinisztikus folyamat és az izometria miatt $I_\infty(h) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(s) dB_s$ L^2 -beli limesz létezik.
Jelölés: $h \in L^2[0, \infty)$ esetén $B(h) = I_\infty(h)$
- $\{B(h) : h \in L^2[0, \infty)\}$ „folyamat”, valószínűségi változók paraméterezett családja.

Állítás

$\{B(h) : h \in L^2[0, \infty)\}$ Gauss folyamat, $\mathbb{E}(B(h)) = 0$ és

$$\text{cov}(B(h_1), B(h_2)) = \int_0^\infty h_1 h_2 = \langle h_1, h_2 \rangle_{L^2[0, \infty)}.$$

- $(B(h_1), \dots, B(h_n))$ normális vektor, mert $a \in \mathbb{R}^n$ esetén $\sum_i a_i B(h_i) = B(\sum_i a_i h_i)$ egy dimenziós normális.
- $B(h) = \lim_{t \rightarrow \infty} I_t(h)$, ahol a limesz L^2 -ben értendő, ezért

$$\mathbb{E}(B(h)) = \lim \mathbb{E}(I_t(h)) = 0, \quad \text{cov}(B(h_1), B(h_2)) = \lim \text{cov}(I_t(h_1), I_t(h_2)) = \lim \int_0^t h_1 h_2 = \int_0^\infty h_1 h_2.$$

- B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban.
- $X_t = \int_0^t 2 - 3\frac{u}{t} dB_u$, ha $t > 0$ és $X_0 = 0$.
- X Gauss folyamat, $\mathbb{E}(X_t) = 0$, $0 < s \leq t$

$$\text{cov}(X_t, X_s) = \frac{1}{st} \int_0^s (2s-3u)(2t-3u)du = \frac{1}{st} \int_0^s 4st-6u(s+t)+9u^2du = \frac{1}{st}(4s^2t-3s^2(s+t)+3s^3) = s$$

- $X_t = 2B_t - \frac{3}{t} \int_0^t u dB_u$. X trajektóriái folytonosak a $(0, \infty)$ félegyenesen, $\{X_t : t > 0\} \stackrel{d}{=} \{B_t : t > 0\}$, azaz $\lim_{t \rightarrow 0} X_t = 0$.
- X Brown mozgás a természetes filtrációjában.

•

$$\text{cov}(X_2 - X_1, B_1) = \int_0^1 2 - 3\frac{u}{2} du - \int_0^1 2 - 3\frac{u}{1} du = \frac{3}{2} \int_0^1 u du = \frac{3}{4}$$

- $X_2 - X_1$ nem független $B_1 \sim \mathcal{F}_1$ -től, azaz X Brown mozgás a saját természetes filtrációjában, de nem az a B természetes filtrációjában.

- B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban.
- $X_t = \int_0^t 2 - 3\frac{u}{t} dB_u$, ha $t > 0$ és $X_0 = 0$.
- X Brown mozgás a természetes filtrációjában.
- Markov folyamat-e X az $\mathcal{F}$ filtrációban?

$$X_2 = \int_0^2 2 - \frac{3}{2}u dB_u = \int_0^1 2 - \frac{3}{2}u dB_u + \int_1^2 2 - \frac{3}{2}u dB_u, \quad Y_1 = \int_0^1 2 - \frac{3}{2}u dB_u \sim \mathcal{F}_1 \perp Y_2 = \int_1^2 2 - \frac{3}{2}u dB_u$$

mert $\int_1^2$ az 1 időpontban újrainduló Brown mozgás növekményeiből van számolva.

- X_2 $\mathcal{F}_1$ -re vonatkozó feltételes eloszlása:

$$\mathbb{P}(X_2 \in H \mid \mathcal{F}_1) = \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 \in H \mid \mathcal{F}_1) = \mathbb{P}(y + Y_2 \in H) \big|_{y=Y_1}$$

- $Y_2 \sim N(0, \int_1^2 (2 - \frac{3}{2}u)^2 du = \frac{1}{4})$, azaz X_2 feltételes eloszlása normális, a várható érték $Y_1 = \int_0^1 2 - \frac{3}{2}u dB_u$ a szórásnégyzet $\frac{1}{4}$.
- Az X_1 -re vonatkozó feltételes eloszlás normális $N(X_1, 1)$, ami nem azonos az $\mathcal{F}_1$ -re vonatkozó feltételes eloszlással. $\implies X$ **nem Markov tulajdonságú az $\mathcal{F}$ filtrációban.**

Az eddigi integrál fogalom nem elég az Itô formulához

- Cél az Itô formula a legegyszerűbb esetre: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható, B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban. Ekkor

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s)ds.$$

- A megjelenő sztochasztikus integrált értelmeztük, ha $\int_0^t \mathbb{E}((f'(B_s))^2)ds < \infty$.
- Nem mindig teljesül, nem is mindig könnyű ellenőrizni.
pl. f az $x \mapsto e^{x^4}$ leképezés egy primitív függvénye, $f'(x) = e^{x^4}$ és $f(0) = 0$. Ekkor $\mathbb{E}((f'(B_s))^2) = \mathbb{E}(e^{2B_s^4}) = \infty$ minden $s > 0$ -ra, $f'(B)$ ugyan progresszíven mérhető, de nem tartozik $\mathcal{S}$ -hez.
- Ötlet: **lokalizálás**. Ha $\varphi \notin \mathcal{S}$ de alkalmas végtelenbe tartó véletlen τ_n időpontokkal $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} \in \mathcal{S}$, akkor φ integrálja lehet a $I(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$ közelítő integrálok limesze.

Definíció

$\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ valószínűségi változó megállási idő az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ minden $t \geq 0$ -ra.

Emlékeztető. Diszkrét idejű martingálok kapcsán azt mondtuk, hogy $\tau : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, \infty\}$ megállási idő az $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ filtrációban, ha $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ minden n -re.

Ez megfogalmazható a fenti alakban is: $\{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=0}^n \{\tau = k\}$ és $\{\tau = n\} = \{\tau \leq n\} \setminus \{\tau \leq n-1\}$.

Folytonos idejű folyamatoknál $\mathbb{P}(\tau = t)$ gyakran nulla és az ilyen eseményeket szokás a kezdő σ algebrához $\mathcal{F}_0$ -hoz hozzávenni.

Definíció

$\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ valószínűségi változó megállási idő az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ minden $t \geq 0$ -ra.

Állítás

$\mathcal{F}$ filtráció, az X folytonos trajektóriájú folyamat adaptált az $\mathcal{F}$ filtrációhoz, H zárt halmaz, $\tau = \inf\{t \geq 0 : X_t \in H\}$. Ekkor τ megállási idő.

Röviden. Zárt halmazba történő első belépés időpontja megállási idő.

- $f(x) = d(x, H) = \inf\{|x - y| : y \in H\}$. $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, azaz f folytonos.
- H zárt: $x \in H \iff f(x) = 0$.
- Elég $\{\tau \leq t\}^c = \{\tau > t\}$ eseményt nézni.

$$\{\tau > t\} = \{\cap_{s \in [0, t]} f(X_s) > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, t]} \{f(X_q) > \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t$$

B Brown mozgás, $m_c = \inf\{t \geq 0 : B_t = c\}$ a c szint első elérési ideje megállási idő.

Állítás

B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban. $\gamma = \max\{t \in [0, 1] : B_t = 0\}$ az egy előtti utolsó nullhely. γ nem lehet megállási idő $\mathcal{F}$ -ben.

- Indirekt módon tegyük fel, hogy γ megállási idő, ekkor

$$\mathbb{P}(\gamma > t \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{(\gamma > t)} \in \{0, 1\}$$

- Másfelől a Brown mozgás Markov tulajdonságát használva: $X_s = B_{t+s} - B_t$, $\mathcal{F}_t \perp\!\!\!\perp X$ Brown mozgás

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\gamma > t \mid \mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}(\exists u \in (t, 1], B_u = 0 \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(\exists s \in (0, 1-t], b + X_s = 0) \big|_{b=B_t} \\ &= \mathbb{P}(m_{-b}(X) \leq 1-t) \big|_{b=B_t} = \mathbb{P}(b^2 m_1(X) \leq (1-t)) \big|_{b=B_t} \geq \mathbb{P}(X_{b^{-2}(1-t)} \geq 1) \big|_{b=B_t} > 0\end{aligned}$$

- $\mathbb{P}(\gamma > t \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{(\gamma > t)} > 0$ minden $t < 1$ -re, azaz $\mathbb{P}(\gamma > t) = 1$ minden $t < 1$.
- $\mathbb{P}(\gamma = 1) = 1$, amiből $\mathbb{P}(B_1 = 0) = 1$ ellenmondásra vezet, hiszen $\mathbb{P}(B_1 = 0) = 0$.

$\mathcal{F}$ filtráció.

- s determinisztikus időpont, $\tau = s$ megállási idő. $\{\tau \leq t\} = \emptyset$, ha $t < s$ és Ω , ha $t \geq s$.
- τ, ρ megállási idők $\mathcal{F}$ -ben, akkor $\tau \wedge \rho$ megállási idő:

$$\{\tau \wedge \rho \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cup \{\rho \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{minden } t \geq 0\text{-ra}$$

- τ, ρ megállási idők $\mathcal{F}$ -ben, akkor $\tau \vee \rho$ megállási idő:

$$\{\tau \vee \rho \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cap \{\rho \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{minden } t \geq 0\text{-ra}$$

- τ, ρ megállási idők $\mathcal{F}$ -ben, akkor $\tau + \rho$ megállási idő:

$$\begin{aligned} \{\tau + \rho \leq t\}^c &= \{\tau + \rho > t\} \\ &= (\{\tau = 0\} \cap \{\rho > t\}) \cup (\{\tau > t\} \cap \{\rho = 0\}) \\ &\quad \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, t]} (\{\tau > q\} \cap \{\rho > t - q\}) \in \mathcal{F}_t \quad \text{minden } t \geq 0\text{-ra} \end{aligned}$$

pl. ha τ megállási idő, akkor minden $t \geq 0$ -ra $\tau + t$ is az.