

Sztochasztikus folyamatok előadás

2025.03.26.

Definíció

$\mathcal{F}$ filtráció. Egy X folyamatot Itô folyamatnak hívunk (az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve), ha $X_0 \sim \mathcal{F}_0$ és léteznek

- μ, σ progresszívan mérhető folyamatok, melyekre $\int_0^t |\mu_s| + \sigma_s^2 ds < \infty$ egy valószínűséggel minden $t \geq 0$ -ra, valamint
- B Brown mozgás az $\mathcal{F}$ filtrációban

úgy, hogy

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

Példák.

- $X_t = t$, azaz X az idő ($X_0 = 0, \mu = 1, \sigma = 0$),
- B Brown mozgás $\mathcal{F}$ -ben $X_t = B_t$,
- $S_t = S_0 \exp\{(r - \sigma^2/2)t + \sigma B_t\}$, $S_0 \sim \mathcal{F}_0$
- $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{1,2}$, $X_t = f(t, B_t)$

Definíció

X Itô folyamat ($X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$).

•

$$\mathcal{L}(X) = \{\varphi : \varphi \text{ progresszíven mérhető és } \int_0^t |\varphi \mu| + \varphi^2 \sigma^2 < \infty \text{ m.b. mindent } t \geq 0\text{-ra}\}$$

• Ha $\varphi \in \mathcal{L}(X)$, akkor

$$I_t^X(\varphi) = \int_0^t \varphi_s \mu_s ds + \int_0^t \varphi_s \sigma_s dB_s$$

Hagyományos jelölés:

$$\int_0^t \varphi_s dX_s$$

$\varphi \in \mathcal{L}(X)$ -re $I^X(\varphi)$ nullából induló, folytonos trajektóriájú, adaptált;

$\varphi \mapsto I^X(\varphi)$ lineáris;

ha τ megállási idő, akkor $I_{t \wedge \tau}^X(\varphi) = I_t^X(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau]})$.

Ha $\varphi \in \mathcal{L}(X)$, akkor létezik egyszerűekből álló (φ_n) sorozat „közelítő” sorozat hozzá, és

$$I_t^X(\varphi) = \text{p-lim } I_t^X(\varphi^{(n)}).$$

Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 függvény, X Itô folyamat. $t_i = t \wedge \frac{i}{n}$

$$\begin{aligned}
 f(X_t) - f(X_0) &= \sum_i f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}) = \\
 &= \sum_i f'(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \quad \xrightarrow{p} \int_0^t f'(X_s) dX_s \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_i f''(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \quad \xrightarrow{p} \frac{1}{2} \int f''(X_s) d[X]_s \quad (\text{Riemann-Stieltjes integrál}) \\
 &+ \sum_i r(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \quad \xrightarrow{p} 0
 \end{aligned}$$

ahol

$$r(x, y) = \int_0^1 \int_0^u f''(x + v(y - x)) - f''(x) dv du$$

- $$\sum_i f''(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = \sum_i f''(X_{t_i})((X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 - ([X]_{t_{i+1}} - [X]_{t_i})) + \sum_i f''(X_{t_i})([X]_{t_{i+1}} - [X]_{t_i})$$
- $t_i = t \wedge \frac{i}{n}, \sigma_n(u) = \frac{i}{n}, \text{ ha } \frac{i}{n} \leq u < \frac{i+1}{n}$

$$\begin{aligned} \sum_i f''(X_{t_i})((X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 - ([X]_{t_{i+1}} - [X]_{t_i})) &= \sum_i f''(X_{t_i}) 2 \int_0^t (X_u - X_{t_i}) \mathbb{1}_{(t_i \leq u < t_{i+1})} dX_u \\ &= 2 \int_0^t f''(X_{\sigma_n(u)})(X_u - X_{\sigma_n(u)}) dX_u \xrightarrow{p} 0 \end{aligned}$$

Ugyanis

$$\psi_u = \max_{v \leq u} |f''(X_v)| \cdot 2 \max_{v \leq u} |X_v|$$

folyamatra ψ folytonos trajektóriájú, adaptált, azaz $\psi \in \mathcal{L}(X)$ és dominálja az integrandust, ami pontonként nullához tart.

- $$\sum_i f''(X_{t_i})([X]_{t_{i+1}} - [X]_{t_i}) \rightarrow \int_0^t f''(X_s) d[X]_s$$

Tétel

X Itô folyamat, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^2$. Ekkor

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d[X]_s$$

Célok:

- $[X]$ csak X lokális martingál részétől függ.
- $[X]$ kiszámítása a

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

felírásból.

Definíció

X, Y folyamat, a $[X, Y]$ folyamat az X és Y zárójele, ha tetszőleges t esetén a $[0, t]$ minden végtelenül finomodó $(t_i^n)_{i=1}^{r_n}$ felosztás sorozatára

$$[X, Y]_t = \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})(Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n})$$

$$[X, X] = [X]$$

Állítás

Ha $[X], [Y]$ létezik, és $[Y] = 0$, akkor $[X, Y] = 0$ és $[X + Y] = [X]$.

Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség.

$$|\sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})(Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n})|^2 \leq \sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \sum_i (Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n})^2 \xrightarrow{p} 0$$

$$(\Delta(X + Y))^2 = (\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 + 2\Delta X \Delta Y$$

•

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s = V_t + M_t,$$

ahol

$$V_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds, \quad M_t = \int_0^t \sigma_s dB_s$$

•

$$[V] \equiv 0, \quad \implies \quad [X] = [M]$$

Azaz Itô folyamat kvadratikus variációját a lokális martingál rész határozza meg, az idő integrál ahhoz nem járul hozzá.

Állítás (Parciális integrálás)

Ha X, Y Itô folyamatok, akkor létezik az $[X, Y]$ zárójel folyamat és

$$[X, Y]_t = (XY)_t - (XY)_0 - \int_0^t X_s dY_s - \int_0^t Y_s dX_s$$

- $s \leq t \leq T$

$$(X_t - X_s)(Y_t - Y_s) = (XY)_t - (XY)_s - X_s(Y_t - Y_s) - Y_s(X_t - X_s)$$

$$[X, Y]_t - [X, Y]_s = (XY)_t - (XY)_s - \int_s^t X_u dY_u - \int_s^t Y_u dX_u$$

$$(X_t - X_s)(Y_t - Y_s) - ([X, Y]_t - [X, Y]_s) = \int_0^T \mathbb{1}_{(s \leq u < t)} (X_u - X_s) dY_u + \int_0^T \mathbb{1}_{(s \leq u < t)} (Y_u - Y_s) dX_u$$

- (t_i) a $[0, t]$ felosztása $\sigma(u) = t_i$, ha $u \in [t_i, t_{i+1})$. Ha a felosztás végtelenül finomodik:

$$\sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) - ([X, Y]_{t_{i+1}} - [X, Y]_{t_i}) = \int_0^t (X_u - X_{\sigma(u)}) dY_u + \int_0^t (Y_u - Y_{\sigma(u)}) dX_u \xrightarrow{p} 0$$

Tegyük fel, hogy X, Y Itô folyamat.

- $[X, Y]_0 = 0$
- $[X, Y]_s = \frac{1}{2}([X + Y] - [X] - [Y])$, azaz $[X, Y] \in FV$.
- Ha φ folytonos trajektóriájú, akkor

$$\int_0^t \varphi_s d[X, Y]_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i \varphi_{t_i^n} ([X, Y]_{t_{i+1}^n} - [X, Y]_{t_i^n})$$

ahol (t_i^n) a $[0, t]$ végtelenül finomodó felosztássorozata.

Tétel

$X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ d -dimenziós Itô folyamat, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^2$. Ekkor

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{k=1}^d \int_0^t (\partial_k f)(X_s) dX_s^{(k)} + \frac{1}{2} \sum_{k, \ell=1}^d \int_0^t (\partial_{k, \ell} f)(X_s) d[X^{(k)}, X^{(\ell)}]_s$$

Rövidebb jelölés

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \cdot dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \cdot d[X]_s$$

Itt $f'(X_s)$ vektor értékű, $f'(X_s) \cdot dX_s = \sum_k (\partial_k f)(X_s) dX_s^{(k)}$ a „skaláris szorzat”

Hasonlóan $f''(X_s)$, $[X]$ $d \times d$ mátrix értékű, és

$$[X]^{k, \ell} = [X^{(k)}, X^{(\ell)}], \quad f''(X_s) \cdot d[X]_s = \sum_{k, \ell=1}^d (\partial_{k, \ell} f)(X_s) d[X^{(k)}, X^{(\ell)}]_s$$

Tétel

$X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ d -dimenziós Itô folyamat, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ $f \in C^2$. Ekkor

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{k=1}^d \int_0^t (\partial_k f)(X_s) dX_s^{(k)} + \frac{1}{2} \sum_{k, \ell=1}^d \int_0^t (\partial_{k, \ell} f)(X_s) d[X^{(k)}, X^{(\ell)}]_s$$

Ha $d = 2$, $X_t^{(1)} = t$, $X_t^{(2)} = B_t$, akkor lényegében visszkapjuk a Brown mozgásra vonatkozó formulát.

$$[X]_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

- $t_i = \frac{i}{n} \wedge t$

-

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_i f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i})$$

-

$$g(u) = f(x + u(y - x)), \quad f(y) - f(x) = g'(0) + \frac{1}{2}g''(0) + \int_0^1 \int_0^v g''(u) - g''(0) du dv$$

-

$$f(X_t) - f(X_s) = f'(X_s)(X_t - X_s) + \frac{1}{2}(X_t - X_s)^T f''(X_s)(X_t - X_s) + (X_t - X_s)^T r(X_s, X_t)(X_t - X_s)$$

•

$$\begin{aligned}
 f(X_t) - f(X_0) &= \sum_i f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i}) \\
 &= \sum_k \sum_i \partial_k f(X_{t_i})(X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)}) && \xrightarrow{p} \sum_k \int_0^t (\partial_k f)(X_s) dX_s^{(k)} \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} \sum_i (X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)}) \partial_{k,\ell} f(X_{t_i})(X_{t_{i+1}}^{(\ell)} - X_{t_i}^{(\ell)}) && \xrightarrow{p} \frac{1}{2} \sum_{k,\ell} \int_0^t (\partial_{k,\ell} f)(X_s) d[X^{(k)}, X^{(\ell)}]_s \\
 &+ \sum_{k,\ell} \sum_i r_{k,\ell}(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})(X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)})(X_{t_{i+1}}^{(\ell)} - X_{t_i}^{(\ell)}) && \xrightarrow{p} 0
 \end{aligned}$$

- $t_i = t \wedge \frac{i}{n}, \sigma_n(u) = \frac{i}{n}, \text{ ha } \frac{i}{n} \leq u < \frac{i+1}{n}.$

-

$$\sum_i \partial_{k,\ell} f(X_{t_i}) ((X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)})(X_{t_{i+1}}^{(\ell)} - X_{t_i}^{(\ell)}) - ([X^{(k)}, X^{(\ell)}]_{t_{i+1}} - [X^{(k)}, X^{(\ell)}]_{t_i}))$$

$$\int_0^t \partial_{k,\ell} f(X_{\sigma_n(u)}) (X_u^{(k)} - X_{\sigma_n(u)}^{(k)}) dX_u^{(\ell)} + \int_0^t \partial_{k,\ell} f(X_{\sigma_n(u)}) (X_u^{(\ell)} - X_{\sigma_n(u)}^{(\ell)}) dX_u^{(k)} \xrightarrow{p} 0$$

-

$$\sum_i \partial_{k,\ell} f(X_{t_i}) ([X^{(k)}, X^{(\ell)}]_{t_{i+1}} - [X^{(k)}, X^{(\ell)}]_{t_i}) \xrightarrow{p} \int_0^t \partial_{k,\ell} f(X_u) d[X^{(k)}, X^{(\ell)}]_u$$

•

$$\sum_{k,\ell} \sum_i r_{k,\ell}(X_{t_i}, X_{t_{i+1}}) (X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)}) (X_{t_{i+1}}^{(\ell)} - X_{t_i}^{(\ell)})$$

ahol

$$r_{k,\ell}(x, y) = \int_0^1 \int_0^u \partial_{k,\ell} f(x + v(y - x)) - \partial_{k,\ell} f(x) dv du$$

•

$$\begin{aligned} & \left| \sum_i r_{k,\ell}(X_{t_i}, X_{t_{i+1}}) (X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)}) (X_{t_{i+1}}^{(\ell)} - X_{t_i}^{(\ell)}) \right|^2 \\ & \leq \max_i |r_{k,\ell}(X_{t_i}, X_{t_{i+1}})|^2 \sum_i (X_{t_{i+1}}^{(k)} - X_{t_i}^{(k)})^2 \sum_i (X_{t_{i+1}}^{(\ell)} - X_{t_i}^{(\ell)})^2 \xrightarrow{p} 0 \end{aligned}$$

Lemma

Ha X, Y Itô folyamatok és $X_t = \int_0^t \sigma_s dB_s$, akkor

$$[X, Y]_t = \int_0^t \sigma_s d[B, Y]_s$$

Következmény

$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$. Ekkor

$$[X]_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds$$

$[X, Y]$, ha $X = I(\varphi)$ és φ egyszerű

- $\varphi = \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}$, $X = I(\varphi)$.
- Y Itô folyamat

$$[X, Y]_t = \text{p-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_j (X_{s_{j+1}^{(n)}} - X_{s_j^{(n)}})(Y_{s_{j+1}^{(n)}} - Y_{s_j^{(n)}})$$

ahol $(s_j^{(n)})$ a $[0, t]$ végtelenül finomodó felosztássorozata.

- Feltehető, hogy $t_r = t$ és $\{t_0, \dots, t_r\} \subset \{s_0^{(n)}, s_1^{(n)}, \dots\}$ minden n -re.
-

$$\begin{aligned} \sum_j (X_{s_{j+1}^{(n)}} - X_{s_j^{(n)}})(Y_{s_{j+1}^{(n)}} - Y_{s_j^{(n)}}) &= \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} \sum_{t_i \leq s_j^{(n)} < t_{i+1}} (B_{s_{j+1}^{(n)}} - B_{s_j^{(n)}})(Y_{s_{j+1}^{(n)}} - Y_{s_j^{(n)}}) \\ &\xrightarrow{p} \sum_{i=0}^{r-1} \varphi_{t_i} ([B, Y]_{t_{i+1}} - [B, Y]_{t_i}) = \int_0^t \varphi_s d[B, Y]_s \end{aligned}$$

$[X, Y]$, ha $X = I(\varphi)$ és $\varphi \in \mathcal{S}$

- $\varphi^{(n)}$ egyszerű integrandusokból álló (gyorsan) közelítő sorozat φ -hez.
- $X^{(n)} = I(\varphi^{(n)})$, $X^{(n)} \rightarrow X$ egy valószínűséggel lokálisan egyenletesen.
-

$$\begin{aligned} [X^{(n)}, Y]_t &= \int_0^t \varphi_u^{(n)} d[B, Y]_u && \xrightarrow{p} \int_0^t \varphi_u d[B, Y]_u \quad \text{később} \\ &= (X^{(n)}Y)_t - \int_0^t X_u^{(n)} dY_u - \int_0^t Y_u \varphi_u^{(n)} dB_u && \xrightarrow{p} (XY)_t - \int_0^t X_u dY_u - \int_0^t Y_u \varphi_u dB_u = [X, Y]_t \end{aligned}$$

Ugyanis

$$\int_0^t Y_u^2 (\varphi_u - \varphi_u^{(n)})^2 du \leq \sup_{u \leq t} Y_u^2 \int_0^t (\varphi_u - \varphi_u^{(n)})^2 du \xrightarrow{p} 0$$

és

$$\sup_{u \leq t} |X_u^{(n)} - X_u| \rightarrow 0 \quad \text{miatt} \quad \int_0^t |X_u^{(n)} - X_u| |\mu_u^Y| + |X_u^{(n)} - X_u|^2 (\sigma_u^Y)^2 du \rightarrow 0$$

- X, Y folyamatok, létezik $[X]$, $[Y]$ és $[X, Y]$. pl. X, Y Itô folyamatok.
- Cauchy-Schwarz alapján

$$|\sum_i (\Delta X)_i (\Delta Y)_i| \leq \sqrt{\sum_i (\Delta X)_i^2} \sqrt{\sum_i (\Delta Y)_i^2}$$

- Ha $(t_i^{(n)})$ az (s, t) intervallum végtelenül finomodó felosztása, $(\Delta X)_i = X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}}$, $(\Delta Y)_i = Y_{t_{i+1}^{(n)}} - Y_{t_i^{(n)}}$, akkor $n \rightarrow \infty$ limesz mellett

$$|[X, Y]_t - [X, Y]_s| \leq ([X]_t - [X]_s)^{1/2} ([Y]_t - [Y]_s)^{1/2}$$

- A növekményekre felírva

$$\sum_i |(\Delta[X, Y])_i| \leq \sum_i (\Delta[X])_i^{1/2} (\Delta[Y])_i^{1/2} \leq \sqrt{\sum_i (\Delta[X])_i} \sqrt{\sum_i (\Delta[Y])_i} = ([X]_t - [X]_s)^{1/2} ([Y]_t - [Y]_s)^{1/2}$$

•

$$V_t^{[X, Y]} - V_s^{[X, Y]} = \sup_i |(\Delta[X, Y])_i| \leq ([X]_t - [X]_s)^{1/2} ([Y]_t - [Y]_s)^{1/2}$$

- X, Y folyamatok, létezik $[X]$, $[Y]$ és $[X, Y]$. pl. X, Y Itô folyamatok.

•

$$|[X, Y]_t - [X, Y]_s| \leq V_t^{[X, Y]} - V_s^{[X, Y]} = \sup \sum_i |(\Delta[X, Y])_i| \leq ([X]_t - [X]_s)^{1/2} ([Y]_t - [Y]_s)^{1/2}$$

- ξ valószínűségi változó

$$|\xi([X, Y]_t - [X, Y]_s)| \leq |\xi|(V_t^{[X, Y]} - V_s^{[X, Y]}) \leq (\xi^2([X]_t - [X]_s))^{1/2} ([Y]_t - [Y]_s)^{1/2}$$

- Ha $\varphi = \sum_i \xi_i \mathbb{1}_{([t_i, t_{i+1}))}$, $\max_i t_i \leq t$, ξ_i valószínűségi változó

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \varphi_u d[X, Y]_u \right| &\leq \int_0^t |\varphi_u| dV_u^{[X, Y]} \leq \sum_i \left(\xi_i^2([X]_{t_{i+1}} - [X]_{t_i}) \right)^{1/2} ([Y]_{t_{i+1}} - [Y]_{t_i})^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^t \varphi_u^2 d[X]_u \right)^{1/2} [Y]_t^{1/2} \end{aligned}$$

Tétel

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező. X, Y folyamatok, létezik $[X]$, $[Y]$ és $[X, Y]$. $\varphi : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ és $\mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{A}$ mérhető. Ekkor

$$\int_0^t |\varphi_s| dV_s^{[X, Y]} \leq \left(\int_0^t \varphi_s^2 d[X]_s \right)^{1/2} [Y]_t^{1/2}$$

Ha $\int_0^t |\varphi_s| dV_s^{[X, Y]} < \infty$, akkor

$$\left| \int_0^t \varphi_s d[X, Y]_s \right| \leq \int_0^t |\varphi_s| dV_s^{[X, Y]}$$

- $\varphi = \sum_i \xi_i \mathbb{1}_{([t_i, t_{i+1}))}$ alakúakra igaz.
- $\varphi^{(n)}$ -re igaz $|\varphi^{(n)}| \leq K$, $\varphi^{(n)} \rightarrow \varphi$ pontonként. Ekkor φ -re is igaz.
- Megmutatható (π - λ -lemma), hogy az előző két pont alapján minden korlátos mérhető φ -re igaz.
- Monoton konvergenciával tetszőleges mérhető φ -re igaz.

$[X, Y]$, ha $X = I(\varphi)$ és $\varphi \in \mathcal{S}$

- $\varphi^{(n)}$ egyszerű integrandusokból álló (gyorsan) közelítő sorozat φ -hez.
- $X^{(n)} = I(\varphi^{(n)})$, $X^{(n)} \rightarrow X$ egy valószínűséggel lokálisan egyenletesen.
-

$$\begin{aligned} [X^{(n)}, Y]_t &= \int_0^t \varphi_u^{(n)} d[B, Y]_u && \xrightarrow{p} \int_0^t \varphi_u d[B, Y] \\ &= (X^{(n)}Y)_t - \int_0^t X_u^{(n)} dY_u - \int_0^t Y_u \varphi_u^{(n)} dB_u && \xrightarrow{p} (XY)_t - \int_0^t X_u dY_u - \int_0^t Y_u \varphi_u dB_u \\ &&& = [X, Y]_t \end{aligned}$$

Ugyanis

$$\left| \int_0^t \varphi_u^{(n)} - \varphi_u d[B, Y]_u \right| \leq \left(\int_0^t (\varphi_u^{(n)} - \varphi_u)^2 ds \right)^{1/2} [Y]_t^{1/2} \rightarrow 0$$

- Létezik τ_n lokalizáló megállási sorozat φ -hez, azaz $\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]} \in \mathcal{S}$ és $\tau_n \rightarrow \infty$.
- $X^{\tau_n} = I(\varphi \mathbb{1}_{[0, \tau_n]})$,
-

$$\begin{aligned}
 [X^{\tau_n}, Y]_t &= \int_0^t \varphi_u \mathbb{1}_{(u \leq \tau_n)} d[B, Y]_u && \rightarrow \int_0^t \varphi_u d[B, Y] \\
 &= (X^{\tau_n} Y)_t - \int_0^t X_{u \wedge \tau_n} dY_u - \int_0^t Y_u \varphi_u \mathbb{1}_{(u \leq \tau_n)} dB_u && \xrightarrow{p} (XY)_t - \int_0^t X_u dY_u - \int_0^t Y_u \varphi_u dB_u \\
 &&& = [X, Y]_t
 \end{aligned}$$

Lemma

Ha X, Y Itô folyamatok és

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s^X ds + \int_0^t \sigma_s^X dB_s^X, \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t \mu_s^Y ds + \int_0^t \sigma_s^Y dB_s^Y$$

akkor

$$[X, Y]_t = \int_0^t \sigma_s^X \sigma_s^Y d[B^X, B^Y]_s$$

Következmény

X, Y Itô folyamatok, $\varphi \in \mathcal{L}(X)$

$$[I^X(\varphi), Y]_t = \int_0^t \varphi_s d[X, Y]_s$$

Állítás

X, Y Itô folyamatok, $\varphi \in \mathcal{L}(X)$

$$[I^X(\varphi), Y]_t = \int_0^t \varphi_s d[X, Y]_s$$

Következmény

X, Y Itô folyamatok, τ megállási idő. Ekkor

$$[X^\tau, Y]_t = [X, Y]_{t \wedge \tau} = [X, Y^\tau]_t = [X^\tau, Y^\tau]_t$$

- Emlékeztető. $(X^\tau)_t = X_{t \wedge \tau} \mathbb{1}_{(\tau > 0)}$.
- Kezdeti érték nem számít a zárójelnél.
- $X^\tau - X_0^\tau = X_{t \wedge \tau} - X_0 = I^X(\mathbb{1}_{[0, \tau]})$, ezért

$$[X^\tau, Y]_t = \int_0^t \mathbb{1}_{(u \leq \tau)} d[X, Y]_u$$

A többi kifejezés is erre vezet.

- X Itô folyamat az $\mathcal{F}$ filtrációban, ha $X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$, ahol B BM $\mathcal{F}$ -ben, μ, σ $\mathcal{F}$ -progresszíven mérhető és $\int_0^t |\mu_s| + \sigma_s^2 ds < \infty$ m.b. minden t -re.
- Itô formula: $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$, $X = (X^1, \dots, X^d)$, X^i Itô folyamatok. Ekkor

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \cdot dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \cdot d[X]_s$$

ahol $[X]^{i,j} = [X^i, X^j]$.

- Ha $X_t^i = X_0^i + \int_0^t \mu_s^i ds + \int_0^t \sigma_s^i B_s^i$, akkor

$$[X^i, X^j]_t = \int_0^t \sigma_s^i \sigma_s^j d[B^i, B^j]_s$$

Új téma: megállított σ algebra, opcionális mintavétel

Cél:

Tétel (Bizonyítás később)

Ha X folytonos trajektóriájú martingál és ρ megállási idő, akkor X^ρ is martingál.

Következmény

X folytonos trajektóriájú lokális martingál, ρ megállási idő. Ekkor X^ρ is lokális martingál.

Ugyanis $(X^\rho)^{\tau_n} = (X^{\tau_n})^\rho$. Mindkettő $X_{t \wedge \rho \wedge \tau_n} \mathbb{1}_{(\rho \wedge \tau_n > 0)}$.

Következmény

Folytonos trajektóriájú lokális martingálok összege lokális martingál.

Ugyanis, ha (τ_n) jó megállási sorozat X -hez, (ρ_n) Y -hoz, akkor $\tau_n \wedge \rho_n$ jó $X + Y$ -hoz.

Cél:

Tétel (Bizonyítás később)

Ha X folytonos trajektóriájú martingál és ρ megállási idő, akkor X^ρ is martingál.

Következmény

X folytonos trajektóriájú lokális martingál, $\rho = \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq K\}$. Ekkor X^ρ korlátos martingál.

X^ρ folytonos trajektóriájú, korlátos lokális martingál.

Lemma

X folytonos trajektóriájú, lokális martingál. Ha X korlátos, akkor martingál.

Dominált konvergencia tétel feltételes változata alapján

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}\left(\lim_{t \rightarrow \infty} X_{t \wedge \tau_n} \mathbb{1}_{(\tau_n > 0)} | \mathcal{F}_s\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_{t \wedge \tau_n} \mathbb{1}_{(\tau_n > 0)} | \mathcal{F}_s) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{s \wedge \tau_n} \mathbb{1}_{(\tau_n > 0)} = X_s$$

Definíció

$\mathcal{F}$ filtráció, τ megállási idő $\mathcal{F}$ -ben. Jelölés: $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

$\mathcal{F}_\tau$ -t megállított σ -algebrának hívjuk.

$\mathcal{F}_\tau$ szemléletes jelentése: a τ -ig összegyűlt információ, azon A események összessége, melyek bekövetkezését el lehet dönteni, ha a folyamatot τ -ig figyeljük meg.

Tétel (Bizonyítás nélkül)

τ megállási idő, $T \geq 0$ determinisztikus

$$\mathcal{F}_{\tau \wedge T} = \sigma\{X_{\tau \wedge T} : X \text{ progresszíven mérhető}\}$$