

Sztochasztikus folyamatok előadás

2025.04.10.

Lemma

$Z \geq 0$ egyből induló, folytonos trajektóriájú lokális martingál. Ekkor Z szupermartingál.

Tetszőleges τ megállási időre

$$\mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau}) \leq 1$$

Ok: Fatou lemma.

Lemma

$Z \geq 0$ egyből induló, folytonos trajektóriájú lokális martingál. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Z martingál.
2. $\mathbb{E}(Z_t) = 1$ minden t -re.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbb{P}(\max_{u \leq t} Z_u \geq n) = 0$ minden t -re.

(1) $\Rightarrow$ (2) világos.

(2) $\Rightarrow$ (1): $s \leq t$ -re az előző lemmából $Z_s - \mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_s) \geq 0$ ami a (2) feltétel szerint nulla várható értékű, azaz $Z_s = \mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_s)$.

Lemma

$Z \geq 0$ egyből induló, folytonos trajektóriájú lokális martingál. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Z martingál.
2. $\mathbb{E}(Z_t) = 1$ minden t -re.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbb{P}(\max_{u \leq t} Z_u \geq n) = 0$ minden t -re.

(2) $\implies$ (3).

- $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : Z_t \geq n\}$, $\tau_n \rightarrow \infty$ egy valószínűséggel, mert Z folytonos trajektóriájú.
- $\tau_n \leq t$ pontosan akkor, ha $\max_{u \leq t} Z_u \geq n$, így $n\mathbb{P}(\max_{u \leq t} Z_u \geq n) = \mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau_n} \mathbb{1}_{(\tau_n \leq t)})$.
- Z^{τ_n} korlátos lokális martingál, vagyis martingál, amiből $\mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau_n}) = \mathbb{E}(Z_0) = 1$ és

$$0 = \mathbb{E}(Z_t) - \mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau_n}) = \mathbb{E}(Z_t - Z_{t \wedge \tau_n}) = \mathbb{E}((Z_t - Z_{t \wedge \tau_n}) \mathbb{1}_{(\tau_n \leq t)}).$$

Innen

$$n\mathbb{P}\left(\max_{u \leq t} Z_u \geq n\right) = \mathbb{E}(Z_t \mathbb{1}_{(\tau_n \leq t)}) \rightarrow 0 \quad \text{ha } n \rightarrow \infty$$

a dominált konvergencia tétel miatt, hiszen Z_t integrálható és $\mathbb{1}_{(\tau_n \leq t)} \rightarrow 0$.

Lemma

$Z \geq 0$ egyből induló, folytonos trajektóriájú lokális martingál. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Z martingál.
2. $\mathbb{E}(Z_t) = 1$ minden t -re.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbb{P}(\max_{u \leq t} Z_u \geq n) = 0$ minden t -re.

(3) $\implies$ (2).

- $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : Z_t \geq n\}$. $\tau_n \leq t$ pontosan akkor, ha $\max_{u \leq t} Z_u \geq n$.
- (3) szerint

$$\mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau_n} \mathbb{1}_{(\tau_n \leq t)}) = n\mathbb{P}\left(\max_{u \leq t} Z_u \geq n\right) \rightarrow 0$$

- Z^{τ_n} korlátos lok. mart., azaz martingál és $\mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau_n}) = \mathbb{E}(Z_0) = 1$

•

$$\mathbb{E}(Z_t) - 1 = \mathbb{E}(Z_t - Z_{t \wedge \tau_n}) = \mathbb{E}((Z_t - Z_{t \wedge \tau_n}) \mathbb{1}_{(\tau_n \leq t)}) = \mathbb{E}(Z_t \mathbb{1}_{(\tau_n \leq t)}) - \mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau_n} \mathbb{1}_{(\tau_n \leq t)}) \rightarrow 0$$

a dominált konvergencia tétel és (3) miatt. Így $\mathbb{E}(Z_t) = 1$.

Tétel

Legyen $Z = \exp\{M - \frac{1}{2}[M]\}$, ahol M nullából induló folytonos trajektóriájú lokális martingál.

Ha $\mathbb{E}(\exp\{\frac{1}{2}[M]_t\}) < \infty$ minden t -re, akkor Z martingál.

Megjegyzés. Ha M Itô folyamat és lokális martingál, akkor $Z = \exp\{M - \frac{1}{2}[M]\}$ is az.

Ez általánosabban is igaz, ha M folytonos trajektóriájú lokális martingál, akkor $Z = \exp\{M - \frac{1}{2}[M]\}$ is az.

- $Z > 0$, folytonos trajektóriájú lokális martingál, $Z_0 = 1$, így elég belátni, hogy $\mathbb{E}(Z_t) = 1$ minden t -re.
- **Bizonyítás vázlat.** $0 < a < 1$ -re legyen

$$Z(a) = \exp\{aM - \frac{1}{2}a^2[M]\}, \quad \text{azaz} \quad Z(a) = Z^a \exp\{\frac{1}{2}(a - a^2)[M]\} = Z^a \exp\{\frac{1}{2}a[M]\}^{1-a}$$

Belátjuk, hogy $Z(a)$ -ra $\lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbb{P}(\max_{u \leq t} Z_u(a) \geq n) = 0$ teljesül, ebből $\mathbb{E}(Z_t(a)) = 1$ és a Hölder egyenlőtlenségből

$$1 = \mathbb{E}(Z_t(a)) \leq \mathbb{E}(Z_t)^a \mathbb{E}(\exp\{\frac{1}{2}[M]_t\})^{1-a} \rightarrow \mathbb{E}(Z_t) \quad \text{ha } a \rightarrow 1$$

Azaz $1 \leq \mathbb{E}(Z_t) \leq 1$, amiből Z martingál tulajdonsága következik a lemmát felhasználva.

Állítás

$X, Y > 0$ valószínűségi változók, $a \in [0, 1]$. Ekkor

$$\mathbb{E}(X^a Y^{1-a}) \leq \mathbb{E}^a(X) \mathbb{E}^{1-a}(Y)$$

- exp függvény konvex, így

$$X^a Y^{1-a} = \exp\{a \ln X + (1-a) \ln Y\} \leq a \exp\{\ln X\} + (1-a) \exp\{\ln Y\} = aX + (1-a)Y$$

•

$$\mathbb{E}(X^a Y^{1-a}) \leq a\mathbb{E}(X) + (1-a)\mathbb{E}(Y)$$

- $\tilde{X} = X/\mathbb{E}(X)$, $\tilde{Y} = Y/\mathbb{E}(Y)$ -ra felírva

$$\mathbb{E}\left(\frac{X^a Y^{1-a}}{\mathbb{E}^a(X) \mathbb{E}^{1-a}(Y)}\right) \leq a + 1 - a = 1 \quad \implies \quad \mathbb{E}(X^a Y^{1-a}) \leq \mathbb{E}^a(X) \mathbb{E}^{1-a}(Y)$$

Szokásos alak $p = 1/a$, $q = 1/(1-a)$ jelöléssel

$$\mathbb{E}(|X||Y|) = \mathbb{E}\left(|X|^{pa} |Y|^{q(1-a)}\right) \leq \mathbb{E}^{1/p}(|X|^p) \mathbb{E}^{1/q}(|Y|^q) = \|X\|_{L^p} \|Y\|_{L^q}$$

$$\mathbb{E}(Z_t(a)) = 1$$

- $0 < a < 1$ -re legyen

$$Z(a) = \exp\{aM - \frac{1}{2}a^2[M]\}, \quad \text{azaz} \quad Z(a) = Z^a \exp\{\frac{1}{2}(a - a^2)[M]\} = Z^a \exp\{\frac{1}{2}a[M]\}^{1-a}$$

- τ megállási idő, és A esemény.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau}(a) \mathbb{1}_A) &= \mathbb{E}\left(Z_{t \wedge \tau}^a \exp\{\frac{1}{2}a[M]_{t \wedge \tau}\}^{1-a} \mathbb{1}_A\right) \leq \mathbb{E}^a(Z_{t \wedge \tau}) \mathbb{E}^{1-a}\left(e^{\frac{1}{2}a[M]_{t \wedge \tau}} \mathbb{1}_A\right) \\ &\leq \mathbb{E}^{1-a}\left(e^{\frac{1}{2}[M]_t} \mathbb{1}_A\right) \end{aligned}$$

- $\tau = \tau_n = \inf\{t : Z_t(a) \geq n\}$, $A = \{\tau_n \leq t\}$ választással

$$n\mathbb{P}\left(\max_{u \leq t} Z_u(a) \geq n\right) = \mathbb{E}(Z_{t \wedge \tau_n}(a) \mathbb{1}_{(\tau_n \leq t)}) \leq \mathbb{E}^{1-a}(\exp\{\frac{1}{2}[M]_t\} \mathbb{1}_{(\tau_n \leq t)}) \rightarrow 0 \quad \text{ha } n \rightarrow \infty$$

a dominált konvergencia tétel miatt:

$\exp\{\frac{1}{2}[M]_t\}$ az integrálható majoráns, ez a Novikov feltétel és

$\mathbb{1}_{(\tau_n \leq t)} \rightarrow 0$, mert $Z(a)$ folytonos trajektóriájú.

$$\mathbb{E}(Z_t) = 1$$

- $0 < a < 1$ -re legyen

$$Z(a) = \exp\left\{aM - \frac{1}{2}a^2[M]\right\}, \quad \text{azaz} \quad Z(a) = Z^a \exp\left\{\frac{1}{2}(a - a^2)[M]\right\} = Z^a \exp\left\{\frac{1}{2}a[M]\right\}^{1-a}$$

- Láttuk, hogy $\mathbb{E}(Z_t) \leq 1$ és a Novikov feltételből $0 < a < 1$ -re $\mathbb{E}(Z_t(a)) = 1$
- A Hölder egyenlőtlenségből

$$\begin{aligned} 1 = \mathbb{E}(Z_t(a)) &\leq \mathbb{E}^a(Z_t) \mathbb{E}^{1-a}(\exp\{\tfrac{1}{2}a[M]_t\}) \leq \mathbb{E}^a(Z_t) \mathbb{E}^{1-a}(\exp\{\tfrac{1}{2}[M]_t\}) \\ \implies \mathbb{E}(Z_t) &\geq \frac{1}{\mathbb{E}^{(1-a)/a}(\exp\{\tfrac{1}{2}[M]_t\})} \rightarrow 1 \quad \text{ha } a \rightarrow 1, \text{ mert ekkor } (1-a)/a \rightarrow 0. \end{aligned}$$

- $Z > 0$ egyből induló, folytonos trajektóriájú lokális martingál, konstans várható értékkel. Láttuk, hogy ekkor Z martingál.

Megjegyzés. Az is elég lenne, hogy $\lim_{a \rightarrow 1-0} \mathbb{E}^{1-a}(\exp\{\tfrac{1}{2}a[M]_t\}) = 1$.

Tétel (Bizonyítás nélkül)

Legyen $Z = \exp\{M - \frac{1}{2}[M]\}$, ahol M nullából induló folytonos trajektóriájú lokális martingál.

Ha $\exp\{\frac{1}{2}M\}$ szubmartingál, akkor Z martingál.

A gondolatmenet hasonló.

•

$$Z(a) = \exp\{aM - \frac{1}{2}a^2[M]\} = \exp\{a^2(M - \frac{1}{2}[M]) + (a - a^2)M\} = Z^{a^2} \exp\{\frac{a}{1+a}M\}^{1-a^2}$$

• $\exp\{\frac{1}{2}M\}$ szubmartingál tulajdonságából.

$$\mathbb{E}(\exp\{\frac{a}{1+a}M_{t \wedge \tau}\} \mathbb{1}_A) \leq \mathbb{E}((1 + \exp\{\frac{1}{2}M_{t \wedge \tau}\}) \mathbb{1}_A) \leq \mathbb{E}((1 + \exp\{\frac{1}{2}M_t\}) \mathbb{1}_A)$$

- B Brown mozgás, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $dQ_T = \exp\{\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T\} d\mathbb{P}$ minden $T \geq 0$ -ra valószínűségi mérték. Q_T sűrűségi folyamata

$$Z_t = \mathbb{E}(\exp\{\lambda B_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T\} \mid \mathcal{F}_t) = \exp\{\lambda B_{T \wedge t} - \frac{1}{2}\lambda^2 T \wedge t\}$$

•

$$Z = e^{M - \frac{1}{2}[M]}, \quad M_t = \int_0^t \mathbb{1}_{(s \leq T)} \lambda dB_s \quad \tilde{B}_t = B_t - [B, M]_t = B_t - \int_0^t \mathbb{1}_{(s \leq T)} \lambda ds = B_t - \lambda T \wedge t$$

- Q_T alatt B driftes BM

$$B_t = \tilde{B}_t + \lambda T \wedge t = \tilde{B}_t + \int_0^t \mathbb{1}_{(s \leq T)} \lambda ds$$

ahol $\tilde{B}$ Brown mozgás Q_T alatt.

- $X_t = B_t + \lambda t$, $S_t(X) = \max_{u \leq t} X_u$. Cél $S_t(X)$ eloszlása.
- $y > 0$

$$\mathbb{P}(S(X)_T \geq y) = Q(S_T(B) \geq y), \quad \text{ahol} \quad \frac{dQ}{d\mathbb{P}} = e^{\lambda B_T - \frac{1}{2} \lambda^2 T}$$

- $\tau = \inf\{t \geq 0 : B_t = y\}$, $\tilde{B}_t = 2B_{t \wedge \tau} - B_t$. $\tilde{B}$ a tükrözött Brown mozgás.

$$\begin{aligned} Q(S_T(B) \geq y) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(S_T \geq y)} e^{\lambda B_T - \frac{1}{2} \lambda^2 T}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(B_T \geq y)} e^{\lambda B_T - \frac{1}{2} \lambda^2 T}\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{(\tilde{B}_T > y)} e^{\lambda(2y - \tilde{B}_T) - \frac{1}{2} \lambda^2 T}\right) \\ &= Q(B_T \geq y) + e^{2\lambda y} Q(B_T < -y) \\ &= \mathbb{P}(B_T + \lambda T \geq y) + e^{2\lambda y} \mathbb{P}(B_T + \lambda T \leq -y) \\ &= \mathbb{P}(X_T \geq y) + e^{2\lambda y} \mathbb{P}(X_T \leq -y) \end{aligned}$$

- Részletek:

$$\{S_T \geq y\} = \{B_T \geq y\} \cup \{\tilde{B}_T > y\}, \quad \mathbb{1}_{(\tau \leq T)} B_T = \mathbb{1}_{(\tau \leq T)} (2B_{T \wedge \tau} - \tilde{B}_T) = \mathbb{1}_{(\tau \leq T)} (2y - \tilde{B}_T)$$