Matek tételek

Nagy Balázs Gábor

2024. június 4.

Tartalomjegyzék

1. tétel - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ határértéke, folytonossága, deriválhatósága x_0 pontban

1.1. Határérték

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekkel foglalkozva, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, ehhez van egy olyan x_n sorozat az f értelmezési tartományból, hogy $x_n \neq x_0$ és $x_n \to x_0$

1. Definíció. *f határértéke x_0 pontban A, ($A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$)*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

ha az értelmezési tartományból vett bármely $x_n \to x_0$ sorozatra, amelyre $x_n \neq = x_0, f(x_n) \to A$

Akkor van az adott f-nek x_0-ban határértéke, ha a jobb és baloldali határértékek megegyeznek

1.1.1. Rendőr-elv

1. Tétel. *Legyenek f, g, h olyan függvények, amelyekre minden x mellett*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

továbbá $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = A$ Akkor a g függvénynek is létezik határértéke x_0 helyen és az

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = A$$

1.1.2. Egyoldali határérték

2. Definíció. *f függvénynek x_0 helyen létezik jobb oldali határértéke, és ez A,*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = A$$

ha az értelmezési tartományból választott bármely $x_n \to x_0, x_n > x_0$ sorozatra $f(x_n) \to A$ (bal oldali határérték analóg)

1.2. Folytonosság

3. Definíció. *f függvény x_0-ban folytonos, ha*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ha f az értelmezési tartomány valamely x_0 pontjában nem folytonos, azt mondjuk ott szakadása van. (Csak az értelemzési tartományon belül! Pl $1/x$ $x = 0$-ban nem szakadás, mivel ott nem értelmezzük.)

1.2.1. Folytonos fv. tulajdonságai

2. Tétel. *Bolzano-tétel*
Legyen f függvény folytonos $[a, b]$ intervallumon, és tegyük fel, hogy $f(a), f(b)$ ellenkező előjelűek.

Ebben az esetben van egy olyan $a < c < b$ hely, amelyre $f(c) = 0$ (indoklás intervallum felezéses)

3. Tétel. *Weierstrass-tétel*
Legyen f folytonos függvény $[a, b]$ intervallumon, akkor ezen az intervallumon felveszi maximumát, és minimumát.

1.3. Derivált, deriválhatóság

4. Definíció. *f differenciálható az x_0 pontban, ha létezik és véges az alábbi határérték*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ezt a határértéket f deriváltjának nevezzük x_0 pontban, jelölése $f'(x_0)$

Az f függvényt differenciálhatónak nevezzük egy intervallumban, ha annak minden belső pontjában differenciálható.

1. Állítás. *Ha f differenciálható az x pontban, akkor ott folytonos is.*

Bizonyítás.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x)$$

Csak akkor lehetséges, ha $\lim_{n\to\infty} f(x + h_n) - f(x) = 0$, azaz $\lim_{n\to\infty} f(x + h_n) = f(x)$ Amely épp azt jelenti, hogy f folytonos x pontban.

□

FONTOS! A fordítottja általában nem igaz.

2. tétel - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deriválható függvény menetének vizsgálata

2.1. Szélsőértékek

5. Definíció. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv. globális minimumhelye x_0, ha $f(x_0) \leq f(x)$ minden $x, x \neq x_0$-ra az értelmezési tartományban*

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fv. lokális minimumhelye x_0, ha létezik olyan $\epsilon > 0$ szám, amelyre $f(x_0) \leq f(x)$ igaz minden olyan x pontra mely $0 < |x_0 - x| < \epsilon$

Ha szigorú minimumhely, akkor $< \leq$ helyett.

Globális minimumhely egyben lokális minimumhely is, fordítva nem feltétlen.

4. Tétel. *f egy intervallumon értelmezett x_0-ban differenciálható függvény. Ha f lokális minimumhelye x_0 akkor $f'(x_0) = 0$.*

Ez a szélsőérték szükséges feltétele.

5. Tétel. *Lagrange-féle középérték-tétel*
Legyen f folytonos az $[a, b]$ véges, zárt intervallumon és differenciálható az intervallum belsejében. Akkor található olyan $\xi \in (a, b)$ pont, amelyre

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2.1.1. L'Hopital szabály

Legyen f, g differenciálható, f', g' folytonos x_0 egy környezetében. Tegyük fel, hogy $f(x_0) = g(x_0) = 0$ és az

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

határértéket szeretnénk meghatározni.

A Lagrange-féle középérték-tétel szerint

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\eta)}$$

Itt ξ, η x és x_0 közötti pontok, azonban $x \to x_0$ miatt, $\xi \to x_0, \eta \to x_0$

Így (ez a L'Hopital szabály)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2.1.2. Szélsőérték másodrendű deriválttal

6. Tétel. *Legyen f differenciálható valamely intervallumban, és tegyük fel, hogy az intervallum valamely x_0 pontjában f kétszer differenciálható. Ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$, akkor x_0 lokális minimumhely.*

2.2. Monotonitás

6. Definíció. *f függvény egy intervallumon akkor monoton növő, ha az intervallum bármely két $x_1 < x_2$ pontjára $f(x_1) \leq f(x_2)$*

(Monoton csökkenő/fogyó a fordítottja, szigorú ha egyenlőtlenség szigorú formában teljesül)

7. Tétel. *f folytonos az $[a, b]$ véges, zárt intervallumon és differenciálható az intervallum belsejében. Ha minden belső pontban $f'(x) > 0$, akkor f az $[a, b]$ intervallumon szigorúan monoton növő.*

8. Tétel. *f folytonos az $[a, b]$ véges, zárt intervallumon és differenciálható az intervallum belsejében. f függvény akkor és csak akkor monoton növő az intervallumon, ha az intervallum minden belső pontjában $f'(x) \geq 0$.*

2.3. Inflexiós pontok

7. Definíció. *f folytonos, kétszer differenciálható függvénynek azokat az x_i pontjait hívjuk inflexiós pontnak, amelyek*

$$f''(x_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

Ezeken a pontokon vált(hat) konvexről konkávvá a függvény.

2.4. Konvex és konkávitás

8. Definíció. *f függvényt konvexnek nevezzük, ha $[a, b]$ intervallumon, tetszőleges x_1, x_2 pontokra és bármely $0 \leq \alpha \leq 1$ valós számra*

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

9. Tétel. *f folytonos, kétszer differenciálható adott intervallumon. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy f konvex az intervallumon:*

$$f''(x) \geq 0$$

az intervallum minden belső pontjában

Avagy, konvex függvény esetében az érintő meredeksége monoton növő.

2.5. $(x_0,\ f(x_0))$ pontba húzott érintő egyenes

f függvény grafikonjához az x_0 pontban húzunk érintőt. Ennek az egyenesnek a meredeksége $f'(x_0)$ lesz. Érintő egyenlete a következő:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$(x - x_0)$ eltolja az egyenest, hogy a 0 értéket x_0-ban vegye fel, majd eltoljuk $f(x_0)$-al, hogy érintő legyen.

3. tétel - Vektortér, altér fogalma, lineáris függetlenség, rang, dimenzió, bázis

3.1. $\mathbb{R}^n$ Vektortér

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{vmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{vmatrix} : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

A halmaz elemeit vektoroknak, komponenseit koordinátának nevezzük.

Vektorokra értelmezett az összeadás, skaláris szorzat, ezekkel a műveletekkel együtt vektortérnek nevezzük.

A lineáris kombináció k darab vektor tetszőleges skalárokkal szorzata, majd összege. Pl: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$

3.2. Altér

9. Definíció. *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy M részhalmazát altérnek nevezzük, ha*

- *bármely $x, y \in M$ esetén $x + y \in M$*
- *bármely $x \in M$, $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\alpha x \in M$*

Definíció miatt minden altér tartalmazza a nullvektort. Legszűkebb altér a $\{0\}$, legnagyobb az egész vektortér.

M altér vektorainak bármely lineáris kombinációja is $\in M$

Pl: $\mathbb{R}^n$-ben origón átmenő síkok, egyenesek

10. Tétel. *Alterek metszete is altér*

Bizonyítás. Legyenek L és M alterek, ha $x, y \in L \cap M$, akkor $x + y \in L$és $x + y \in M$, mert mindketten alterek, tehát $x + y \in L \cup M$

Ehhez hasonlóan skalár szorzásra is. □

3.2.1. Generált altér

10. Definíció. *Az $a_1, \dots, a_k$ vektorokat tartalmazó legszűkebb alteret*

$$lin\{a_1, \dots, a_k\}$$

jelöljük, ezt az ezen vektorokat tartalmazó összes altér metszeteként értelmezzük, az adott vektorok által ***generált altérnek*** *nevezzük.*

11. Tétel. *Az $a_1, \dots, a_k$ vektorok által generált altér ezen vektorok összes lineáris kombinációinak halmaza, ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$*

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$$

3.3. Lineáris függetlenség

11. Definíció. *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér $a_1, \dots, a_k$ vektorait* ***lineárisan függetlennek*** *nevezzük, ha valamely $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ skalárokra*

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k = 0 \rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$$

(A vektorok lineáris kombinációja csak úgy 0, ha minden együttható 0)

Ellenkező esetben a vektorokat ***lineárisan összefüggőnek*** *nevezzük.*

12. Tétel. *Az $a_1, \dots, a_k$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan összefüggőek, ha valamelyik kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként.*

Bizonyítás. Ha valamelyik vektor kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként (pl a_1) akkor

$$a_1 = \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$$

Átrendezve

$$-a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k = 0$$

□

13. Tétel.
- *Ha a vektorok lineárisan függetlenek, akkor bármely részhalmazuk is az*
- *Ha a vektorok között szerepel a 0, akkor lineárisan összefüggők*
- *Ha a vektorok között szerepel két azonos, akkor lineárisan összefüggők*
- *Ha a vektorok lineárisan összefüggők, akkor bármilyen vektorral bővítve is összefüggők*

3.4. Generátorrendszer

12. Definíció. *Az $\mathbb{R}^n$ vektortérben az $a_1, \dots, a_k$ vektorrendszert* ***generátorrendszernek*** *nevezzük, ha*

$$lin\{a_1, \dots, a_k\} = \mathbb{R}^n$$

Azaz a tér minden vektora előáll az adott vektorok lineáris kombinációjaként.

(hasonló altér generátorrendszerrel, csak ott egy altéren belüli vektorkkal generálunk az altéren belül)

3.5. Bázis

13. Definíció. *Az $\mathbb{R}^n$ vektortérben az $a_1, \dots, a_k$ vektorrendszert* ***bázisnak*** *nevezzük, ha*

- *lineárisan független rendszer, és*
- *generátorrendszer*

(altér bázisa analóg)

Tulajdonságai:

– Egy bázis a maximális elemszámú lineárisan független rendszer

– Egy bázis minimális elemszámú generátorrendszer

– Egy vektortérben minden bázis azonos elemszámú

– Egy vektortérben bármely vektor egyértelműen írható fel a bázisvektorok lineáris kombinációjaként

14. Definíció. *Az $\mathbb{R}^n$ vektortérben az $e_1, \dots, e_k$ vektorrendszert* ***standard bázisnak*** *nevezzük.*

$$e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad e_k = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{vmatrix}$$

3.6. Dimenzió

15. Definíció. *Egy vektortér vagy altér dimenzióján a benne található maximális lineárisan független rendszer (azaz bázis) elemszámát értjük.*

3.7. Rang

16. Definíció. *Valamely $a_1, \dots, a_k$ vektorok által generált altér dimenzióját a vektorrendszer* ***rangjának*** *is nevezzük.*

$$rank\{a_1, \dots, a_k\} = dim\ lin\{a_1, \dots, a_k\}$$

3.8. Mátrix rangja, szabadságfoka

17. Definíció. *Tekintsünk egy $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezést. Az A értékkészletét*

$$imA = \{y \in \mathbb{R}^m : van\ olyanx \in \mathbb{R}^n, hogyy = Ax$$

az A ***képterének****, míg a*

$$kerA = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0$$

halmazt az A ***magterének*** *nevezzük, ezek mind alterek az $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R}^m$ alterekben.*

18. Definíció. *Az A $m \times n$ mátrix* ***rangján*** *a képtér dimenzióját értjük*

$$rangA = dim\ imA$$

Az A $m \times n$ mátrix ***szabadságfokán*** *a magtér dimenzióját értjük*

$$degA = dim\ kerA$$

14. Tétel. *Bármely A $\mathbb{R}^n$-en értelmezett lineáris leképzésre*

$$rankA + degA = n$$

4. tétel - Lineáris egyenletrendszer megoldása

4.1. Homogén lineáris egyenletrendszer

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Formájú egyenletrendszer, $\forall a_{ij} \in \mathbb{R}$, n oszlopa, m sora van A mátrixnak, $x \in \mathbb{R}^n$

$$Ax = 0 \tag{2}$$

Formában írható le egyszerűbben. $x = 0$ minden esetben megoldás, ker A (A mátrix magtere) altér a megoldásainak halmaza.

Emlékeztető (A magtere):

$$ker A = x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \tag{3}$$

Úgyhogy definíció miatt igaz, hogy ker A altér az egyenlőség megoldásainak halmaza.

Megoldásuk ugyanaz, mint az inhomogén LE-k, úgyhogy ott írok majd példát.

4.2. Inhomogén lineáris egyenletrendszer

$$Ax = b \tag{4}$$

Formájú egyenletrendszer, A mátrix $m \times n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in (\mathbb{R}^m \setminus 0)$

15. Tétel. *Az egyenletrendszer csak akkor megoldható, ha $b \in \operatorname{im} A$ (b vektor előállítható A oszlopainak lineáris kombinációjaként)*

A megoldás csak akkor egyértelmű, ha A oszlopai lineárisan függetlenek.

Bizonyítás. Ha lenne két egymástól különböző megoldás (x, y), akkor:

$$A(x - y) = Ax - Ay = b - b = 0$$

□

Bizonyítás alapján nincs két ilyen különböző megoldás, mivel különbségük 0 $(x = y)$

5. tétel - Kvadratikus mátrix inverze, sajátérték, sajátvektor

5.1. Inverz mátrix

E vagy I az egységmátrix (minden eleme 0, kivéve diag, mert az 1-esek, $n \times n$)

19. Definíció. *A négyzetes mátrix inverze A^{-1}, ha*

$$A \cdot A^{-1} = I$$

16. Tétel. *Egy $n \times n$ mátrixra ekvivalensek a következőek*

1. *A invertálható*
2. *A oszlopai lineárisan függetlenek*
3. *ker A = 0*
4. *im A = $\mathbb{R}^n$*
5. *rank A = n*
6. *deg A = 0*
7. *det(A) $\neq 0$*

17. Tétel. *Ha $n \times n$ A mátrix invertálható, akkor*

$$Ax = b$$

egyenletrendszer egyértelműen megoldható, a megoldás

$$x = A^{-1}b$$

5.2. Inverz kiszámítása

Tankönyvből másolt példa, lehet elemi bázistranszformációval, Gauss-eliminációval és determináns segítségével, Gauss-t írom le.

Gauss eliminációnál addig vonogatjuk ki egymásból a sorokat, ameddig ki nem jön az amit akarunk (invertálásnál az, hogy helyet cseréljen I)

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Felírjuk egymás mellé A-t és I-t

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Harmadik sorból kivonjuk az elsőt

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Második sort hozzáadjuk a harmadikhoz

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Harmadikat kivonjuk az első és másodikból

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Másodikat kivonjuk az elsőből

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Sikeresen invertáltunk,

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ha akarjuk le lehet ellenőrizni $A \cdot A^{-1} = I$-nek kell kijönnie

Invertálható mátrixok szorzata is invertálható

5.3. Sajátérték, sajátvektor

20. Definíció. *$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(A_{n\times n})$.*

λ A sajátértéke, ha van olyan $v \neq 0$ vektor, amelyre

$$Av = \lambda v$$

*Ebben az esetben v vektort a λ sajátértékhez tartozó **sajátvektornak** nevezzük*

A sajátvektorok sosem egyértelműek, $\alpha \neq 0$ skalárszorosuk is sajátvektor

$$A(\alpha v) = \alpha A v = \alpha \cdot \lambda v = \lambda(\alpha v)$$

5.3.1. Sajátérték kiszámolása

Definíció szerint

$$Av = \lambda v = \lambda I v$$

Ebből

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Ez alapján többféleképp is kiszámolhatjuk, kis mátrixokra a determináns módszert szeretem. Példa 2×2 mátrixra

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Itt λ akkor A saját értéke, ha $A - \lambda I$ determinánsa 0, azaz

$$det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2 - 1^2 = 0$$

$$(2-\lambda)^2 - 1^2 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

Ez másodfokú megoldó képlettel megoldható, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$

5.3.2. Sajátvektor kiszámolása

Előző példát folytatva λ_1 sajátvektora

$$(A - \lambda I)v = 0$$

λ-t ismerjük, egy egyenletrendszert kell megoldanunk.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda_1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

λ_1-et behelyettesítve

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a+b \\ a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

A sajátvektoros feladatoknál a mátrix mindig szinguláris, így az egyenletrendszernek nem egy megoldása lesz. Esetünkben $a + b = 0 \rightarrow a = -b$, ha $a = 1$-et fixáljuk, akkor sajátvektorunk

$$\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

Másik sajátérték sajátvektorát is ugyanígy kapjuk meg.

18. Tétel. *A akkor és csak akkor invertálható, ha $\lambda = 0$ nem sajátérték*

19. Tétel. *Különböző sajátértékekhez tartozó nem nulla sajátvektorok lineárisan függetlenek*

6. tétel - Kvadratikus alak definitsége

6.1. Kvadratikus alak

21. Definíció. *$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt kvadratikus alaknak nevezzük, ha*

$$Q(x) = Q(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

(Minden tag tisztán másodfokú)
Más formában felírva

$$Q(x) = \langle x, Ax \rangle$$

(x és Ax vektorok skaláris szorzata)

Egy bizonyos kvadratikus alaknak több mátrix reprezentációja is van, például

$$Q(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2$$

esetében

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$$

Mátrixok is teljesítik a definíciót, emiatt a kvadratikus alak megadására a szimmetrikus ($A = A^T$) mátrixot használjuk, ezt ha akarjuk bármelyik kvadratikus alak mátrixából ki tudjuk számolni $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ képlettel

6.2. Kvadratikus alak definitsége

22. Definíció. *A Q kvadratikus alak*

- *pozitív definit, ha $Q(x) > 0$ minden $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ esetén*
- *pozitív szemidefinit, ha $Q(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, és van olyan $x_0 \neq 0$, hogy $Q(x_0) = 0$*
- *negativ definit, ha $Q(x) < 0$ minden $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ esetén*
- *negativ szemidefinit, ha $Q(x) \leq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, és van olyan $x_0 \neq 0$, hogy $Q(x_0) = 0$*
- *indefinit, ha a fentiek egyike sem teljesül*

6.2.1. Definitség sajátértékek alapján

Ha $A_{n\times n}$ kvadratikus alakot diagonáljuk ($\hat{A} = S^T AS$, ahol S a saját vektorokból alakított mátrix) Akkor

$$\hat{A} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{vmatrix}$$

Ezen téren a kvadratikus alak tiszta négyzetes alakú lesz (nincs pl x_1x_2), így a definitség csak a sajátértékeken múlik.

Ha van $\lambda = 0$, akkor létezik olyan $x \neq 0$ vektor amire igaz a $Q(x) = 0$ (pl $Q(x) = 0x_1^2 + 2x_2^2$, és $x = |1{,}0|$)

Ha minden $\lambda > 0$ akkor Q(x) minden esetben pozitív

Ha van olyan ami $\lambda < 0$, akkor Q(x) megfelelő x mellett negatív tud lenni

20. Tétel. *Q kvadratikus alak esetén, ahol B jelzi a hozzá tartozó szimmetrikus mátrixot, azaz*

$$Q(x) = \langle x, Bx \rangle$$

minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén, B sajátértékeit tekintjük

- *Ha mindegyik sajátérték pozitív, akkor Q pozitív definit*
- *Ha mindegyik sajátérték nemnegatív és van köztük nulla, akkor Q pozitív szemidefinit*
- *Ha mindegyik sajátérték negatív, akkor Q negatív definit*
- *Ha mindegyik sajátérték nempozitív és van köztük nulla, akkor Q negatív szemidefinit*
- *Ha van pozitív és negatív sajátérték is, akkor Q indefinit*

7. tétel - $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény szélsőértéke

7.1. Többváltozós függvények deriváltja

23. Definíció. *f parciálisan deriválható, a k-ik változó szerint az x pontban, ha az*

$$F(t) = f(x + te_k)$$

függvény t változó szerint differenciálható a $t = 0$ pontban, ahol e_k a k-ik standard bázisvektor Ilyenkor jelölésben

$$F'(0) = f'_k(x) = \frac{\delta f}{\delta x_k}(x)$$

Azaz a k-ik változó szerinti parciális deriváláshoz a többi változót állandónak tekintjük.

7.1.1. Másodrendű parciális deriváltak

Jelölése

$$\frac{\sigma^2 f}{\sigma x \sigma y}(x, y)$$

Vegyes, ha különböző változó szerint, tiszta másodrendű, ha ugyanaz a változó szerint deriváltunk.

21. Tétel. *Young-tétel Ha az f n-változós függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényei léteznek és folytonosak, akkor az $f''(x)$ Hesse-mátrix szimmetrikus, azaz*

$$\frac{\sigma^2 f}{\sigma x_i \sigma x_j}(x) = \frac{\sigma^2 f}{\sigma x_j \sigma x_i}(x)$$

Bármely $i, j = 1,2,\ldots,n$ indexekre

Ezekből készített mátrixot a Hesse mátrixnak hívjuk.

7.2. Többváltozós függvény szélsőértéke

24. Definíció. *Lokális szélsőérték $\mathbb{R}^n$ tér origó középpontú egységgömbjén a*

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \|x\| \leq 1\}$$

halmazt értjük. Egy $a \in \mathbb{R}^n$ pont körüli $r > 0$ sugarú gömb

$$a + rB = \{x \in \mathbb{R} : \|x - a\| \leq r\}$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény a pontja lokális minimum, ha van olyan $\epsilon > 0$, hogy

$$f(x) \geq f(a)$$

Az értelmezési tartomány minden olyan x pontjában, amelyre $x \in a + \epsilon B$ (Egységgömb) Lokális maximum ehhez analóg, és hasonlóan fogalmazhatjuk meg a globális minimum és maximumot is.

A továbbiakban $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény parciális deriváltjai léteznek, és folytonosak az a pont egy környezetében.

22. Tétel. *Elsőrendű szükséges feltétel Ha az $a \in \mathbb{R}$ pont az f lokális minimumhelye, akkor*

$$\frac{\delta f}{\delta x_1}(a) = \frac{\delta f}{\delta x_2}(a) = \cdots = \frac{\delta f}{\delta x_n}(a) = 0$$

Azaz minden változó szerinti parciális derivált (meredekség) nulla.

23. Tétel. *Másodrendű szükséges feltétel Tegyük fel, hogy a az f lokális minimumhelye. Akkor az f Hesse-mátrixa az a helyen pozitív szemidefinit.*

Bizonyítás. Legyen $v \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges

$$F(t) = f(a + tv)$$

F kétszer differenciálható, és a a az f lokális minimumhelye, akkor 0 az F lokális minimumhelye, ezért $F"(0) \geq 0$, azaz a Hesse mátrix pozitív szemidefinit, mivel v tetszőleges. □

Ez csak szükséges, nem elégséges feltétel

24. Tétel.

Tegyük fel, hogy az a pontban az f parciális deriváltjai nullák, és itt az $f"(a)$ Hesse-mátrix pozitív definit. Akkor a az f lokális minimumhelye. (ha a Hesse mátrix negatív definit, akkor lokális maximum)

8. tétel - Valószínűségi változó, eloszlásfüggvény fogalma. Kapcsolat az eloszlás és eloszlásfüggvény, illetve a sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény között

8.1. Valószínűségi változó

25. Definíció. *Eseménytér*
*Ω egy kisérlet kimeneteleinek halmaza, ezt az adott kísérlethez tartozó **eseménytérnek** nevezzük.*
Pl. dobókocka $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

26. Definíció. *Az eseménytér részhalmazait **eseményeknek** nevezzük.*
Pl. dobókocka páros $A = \{2,4,6\}$

27. Definíció. *Valószínűségi változó*
Tekintsük egy (Ω, A, P) valószínűségi mezőt. Az

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

*függvényt **valószínűségi változónak** nevezzük, ha bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\{X < x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in A$$

azaz minden ilyen nívóhalmaz megfigyelhető (és így van valószínűsége)

28. Definíció. *Egy valószínűségi változót **diszkrétnek** nevezzük, ha az értékkészlete véges vagy végtelen sorba rendezhető (azaz megszámolható halmaz)*

8.2. Eloszlásfüggvény

29. Definíció. *Eloszlásfüggvény*
Tekintsünk egy (Ω, A, P) valószínűségi mezőt és egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változót. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$F(x) = P(X < x)$$

Az így értelmezett $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ függvényt X eloszlásfüggvényének nevezzük.

8.3. Sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény

30. Definíció. *X folytonos eloszlású, ha található olyan f integrálható függvény a számegyenesen, amelyre*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

*minden $x \in \mathbb{R}$, ilyenkor az f fv-t az X **sűrűségfüggvényének** nevezzük.*

Folytonos sűrűségfüggvénynél

$$P(X = a) = 0$$

,

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$$

25. Tétel. *Ha f az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, akkor*

– $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

–

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

– *Tetszőleges $a < b$ valós számokra*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

8.4. Diszkrét eloszlás és eloszlásfüggvény

26. Tétel. *Tekintsünk egy X valószínűségi változót és jelölje F az X eloszlásfüggvényét.*

– $\forall x \in \mathbb{R}$ *esetén* $0 \leq F(x) \leq 1$

– *F monoton növekvő és minden pontban balról folytonos*

– $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

– *Ha $a < b$ tetszőleges valós számok, akkor*

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Ha egy X diszkrét valószínűségi változó értékkészlete $R = \{x_1, x_2, \dots\}$, ahol $x_1 < x_2 < \dots$, és X ezeket az értékeket rendre $p_1, p_2, \dots$ valószínűséggel veszi fel, akkor az X eloszlásfüggvénye ilyen alakú

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ha\ x \leq x_1 \\ p_1 + \dots + p_k & ha\ x_k < x \leq x_{k+1} \end{cases}$$

Bármely $k = 1{,}2, \dots$ esetén

9. tétel - Nevezetes eloszlások

Legyen (Ω, A, P) egy valószínűségi mező (mindegyiknél ugyanez)

9.1. Karakterisztikus

Egy kisérlet, vagy bekövetkezik, vagy nem az esemény.

$A \in \mathcal{A}$ esemény, amelyre $P(A) = p, 0 < p < 1$, ekkor

$$X = \begin{cases} 1 & \text{ha A bekövetkezik} \\ 0 & \text{ha A nem következik be} \end{cases}$$

Valószínűségi eloszlása (karakterisztikus eloszlás)

$$P(X = 0) = 1 - p, P(X = 1) = p$$

27. Tétel.

- *Az eloszlás paramétere* $0 < p < 1$
- *Az eloszlás várható értéke* $E(X) = p$
- *Az eloszlás varianciája* $Var(X) = p(1 - p)$

9.2. Binomiális

Bernoulli-kisérlet: n darab független esemény, k darab A esemény következik be.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad k = 0,1,2,\ldots,n$$

28. Tétel.

- *Az eloszlás paraméterei:* $n \in \mathbb{N}$ *és* $0 < p < 1$
- *Az eloszlás várható értéke* $E(X) = np$
- *Az eloszlás varianciája* $Var(X) = np(1 - p)$

9.3. Hipergeometriai

Visszatevés nélküli mintavételes kísérlet, N darabos populáció, ebből m selejt, n darabos mintát választunk véletlenszerűen ($n \le m$) X a mintában lévő selejteket jelenti.

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k} \cdot \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

(hibásak közül visszatevés nélkül kiveszünk k darabot, és a jók közül kiveszünk $n - k$ darabot)

29. Tétel.

- *Az eloszlás paraméterei:* $N, m, n \in \mathbb{N}$
- *Az eloszlás várható értéke*

$$E(X) = n \cdot \frac{m}{N}$$

- *Az eloszlás varianciája* $Var(X) = \frac{N-n}{N-1} n \cdot \frac{m}{N}(1 - \frac{m}{N})$

9.4. Geometriai

Addig ismételjük a kisérletet, ameddig az A esemény be nem következik. (Egymástól független $P(A) = p$ kisérletek)

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p \quad k = 1,2,\dots$$

30. Tétel.

- *Az eloszlás paramétere* $0 < p < 1$
- *Az eloszlás várható értéke*

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

- *Az eloszlás varianciája*

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

9.5. Poisson

Értékkészlete $\{0\} \cup \mathbb{N}$, $\lambda > 0$ adott valós szám, eloszlása

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k = 0,1,2,\dots$$

31. Tétel.

- *Az eloszlás paramétere* $0 < \lambda$
- *Az eloszlás várható értéke*

$$E(X) = \lambda$$

- *Az eloszlás varianciája*

$$Var(X) = \lambda$$

A Poisson-eloszlás a binomiális eloszlás "határeloszlásaként" származtatható

32. Tétel. *Ha adott* $\lambda > 0$ *és* $0 < p_n < 1$ *olyan sorozat, amelyre* $np_n = \lambda$ *akkor,*

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

bármely $k = 0,1,2,\dots$ *esetén*

9.6. Egyenletes

$[a, b]$ intervallum, minden részintervallumba esés az intervallum hosszával arányos.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a < x < b \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

33. Tétel.

- *Az eloszlás paraméterei a és b, $a < b$*
- *Az eloszlás várható értéke*

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

- *Az eloszlás varianciája*

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

9.7. Exponenciális

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

34. Tétel.

- *Az eloszlás paramétere $\lambda > 0$*
- *Az eloszlás várható értéke $E(X) = 1/\lambda$*
- *Az eloszlás varianciája $Var(X) = 1/\lambda^2$*

9.8. Normális

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

$(-\infty, 0)$ intervallumon szigorúan monoton növő, $(0, +\infty)$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, globális maximuma $x = 0$ helyen.

$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ intervallumon konvex $(-1, 1)$ intervallumon konkáv.

35. Tétel.

- *Az eloszlásnak nincs paramétere*
- *Az eloszlás várható értéke $E(X) = 0$*
- *Az eloszlás varianciája $Var(X) = 1$*

10. tétel - Centrális határeloszlástétel

10.1. Centrális határeloszlástétel

Kisérlet egy ismeretlen m mennyiség értékének meghatározására, n számú független kisérlettel, közelítéshez a kisérletek kimeneteleinek számtani átlagát használjuk.

$X_1, \ldots, X_n$ jelöli a kisérletek kimeneteleit, ezek független, azonos eloszlású változók, melyek

$$E(X_k) = m, \quad D(X_k) = \sigma, \quad k = 1,2,\ldots,n$$

Vezessük be a következő jelölést a változók standardizált átlagára

$$Y_n = \frac{\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) - m}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Tételeink szerint ennek az Y_n változónak a várható értéke 0, szórása 1.

Alekszandr Ljapunov orosz matematikus felismerése: Y_n változó eloszlása tart a standard normális eloszláshoz.

36. Tétel. *Centrális határeloszlás-tétel*
F_n jelöli Y_n eloszlásfüggvényét

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x)$$

10.2. Csebisev-egyenlőtlenség

Plusz, ez a rész valszeg nem kell

Cél meghatározni a $P(a < X < b)$ valószínűséget, de nem tudjuk, hogy milyen eloszlású X valószínűségi változó, vagy az túl bonyolult.

37. Tétel. *Csebisev-egyenlőtlenség*
$E(X) = m$, $D(X) = \sigma$, ekkor

$$P(|X - m| < k \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Bármely $k > 0$ szám esetén.

Bizonyítás tankönyvben