Sztochasztikus folyamatok előadás

2025.03.27.

Tétel (Opcionális mintavétel)

X folytonos trajektóriájú martingál, τ megállási idő. Ekkor $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_\tau) = X_{t\wedge\tau}$

- Elnevezés: τ diszkrét, ha véges sok lehetséges értéke van.
- $\tau \in \{t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty\}$

$$A \in \mathcal{F}_\tau \quad \iff \quad \forall i,\, A \cap \{\tau = t_i\} \in \mathcal{F}_{t_i}$$

  Ugyanis

$$A \in \mathcal{F}_\tau \quad \implies \quad A \cap \{\tau = t_i\} = A \cap \{\tau \le t_i\} \setminus (\cup_{j<i} A \cap \{\tau \le t_j\}) \in \mathcal{F}_{t_i}$$

  és ha a feltétel teljesül, akkor

$$A \cap \{\tau \le t\} = \cup_{i:t_i \le t} A \cap \{\tau = t_i\} \in \mathcal{F}_t$$

- Mérhetőség. Kell $X_{t\wedge\tau} \sim \mathcal{F}_\tau$. Az előző pont szerint elég, hogy

$$\{X_{t\wedge\tau} \in H\} \cap \{\tau = t_i\} = \{X_{t\wedge t_i} \in H\} \cap \{\tau = t_i\} \in \mathcal{F}_{t_i}$$

- Parciális átlagolás. $A \in \mathcal{F}_\tau$

$$\mathbb{E}(X_t \mathbb{1}_A) = \sum_i \mathbb{E}(X_t \mathbb{1}_{A\cap\{\tau=t_i\}}) = \sum_i \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_{t_i}) \mathbb{1}_{A\cap\{\tau=t_i\}}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \textstyle\sum_i X_{t\wedge t_i} \mathbb{1}_{(\tau=t_i)}) = \mathbb{E}(X_{t\wedge\tau} \mathbb{1}_A)$$

Opcionális mintavétel, általános megállási időre (Ismétlés)

Tétel (Opcionális mintavétel)

X folytonos trajektóriájú martingál, τ megállási idő. Ekkor $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_\tau) = X_{t\wedge\tau}$

-
-

$$\tau_n = \begin{cases} \frac{k+1}{2^n} & \text{ha } \tau \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}),\ k = 0, 1, \dots, n2^n - 1 \\ \infty & \tau \geq n \end{cases}$$

- τ_n diszkrét megállási idő. Ehhez elég, hogy

$$\{\tau_n = \tfrac{k+1}{2^n}\} = \{\tau < \tfrac{k+1}{2^n}\} \setminus \{\tau < \tfrac{k}{2^n}\} \in \mathcal{F}_{\frac{k+1}{2^n}}$$

de

$$\{\tau < t\} = \cup_n \{\tau \leq t - \tfrac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{minden } t\text{-re.}$$

Ötlet. $\tau \leq \tau_n$, $\tau_n \searrow \tau$, ezért tetszőleges $A \in \mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_{\tau_n}$-re

$$\mathbb{E}(X_t \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_{t\wedge\tau_n} \mathbb{1}_A), \quad \text{ahol } X_{t\wedge\tau_n} \to X_{t\wedge\tau}$$

Ellenőrizendő: $\mathbb{E}(X_{t\wedge\tau_n} \mathbb{1}_A) \to \mathbb{E}(X_{t\wedge\tau} \mathbb{1}_A)$ és $X_{t\wedge\tau} \sim \mathcal{F}_\tau$.

Kell: $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$-re $\{X_{t\wedge\tau} \in H\} \in \mathcal{F}_\tau$, azaz

$$\{X_{t\wedge\tau} \in H\} \cap \{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_s \quad \text{minden } s \geq 0 \text{ és } H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ Borel halmazra}$$

- τ_n diszkrét, $X_{t\wedge\tau_n} \sim \mathcal{F}_t$, minden t-re.
- $X_{t\wedge\tau} = \lim_{n\to\infty} X_{t\wedge\tau_n}$.
- $X_{t\wedge\tau} \sim \mathcal{F}_t$, minden t-re.
- $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, minden s-re

$$\begin{aligned}\{X_{t\wedge\tau} \in H\} \cap \{\tau \leq s\} &= \{X_{t\wedge\tau} \in H\} \cap \{\tau < s\} \cup \{X_{t\wedge\tau} \in H\} \cap \{\tau = s\} \\ &= \{X_{(s\wedge t)\wedge\tau} \in H\} \cap \{\tau < s\} \cup \{X_{s\wedge t} \in H\} \cap \{\tau = s\} \in \mathcal{F}_s\end{aligned}$$

$X_{t\wedge\tau_n} \to X_{t\wedge\tau}$ L^1-ben

Elég megmutatni, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra létezik K úgy, hogy

$$\sup_n \mathbb{E}\big(|X_{t\wedge\tau_n}|\mathbb{1}_{(|X_{t\wedge\tau_n}|>K)}\big) \leq \varepsilon \quad \text{azaz } \{X_{t\wedge\tau_n} \,:\, n \geq 1\} \text{ egyenletesen integrálható}$$

Ekkor ugyanis

$$|X_{t\wedge\tau}|\mathbb{1}_{(|X_{t\wedge\tau}|>K)} \leq \liminf |X_{t\wedge\tau_n}|\mathbb{1}_{(|X_{t\wedge\tau_n}|>K)} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{E}\big(|X_{t\wedge\tau}|\mathbb{1}_{(|X_{t\wedge\tau}|>K)}\big) \leq \varepsilon$$

Legyen $g_K(x) = (-K) \vee x \wedge K$. g_K folytonos.

$$\mathbb{E}(|X_{t\wedge\tau} - X_{t\wedge\tau_n}|) \leq 2\varepsilon + \mathbb{E}(|g_K(X_{t\wedge\tau}) - g_K(X_{t\wedge\tau_n})|) \leq 3\varepsilon \quad \text{ha } n \text{ elég nagy.}$$

Ebből tetszőleges A eseményre

$$|\mathbb{E}(X_{t\wedge\tau}\mathbb{1}_A) - \mathbb{E}(X_{t\wedge\tau_n}\mathbb{1}_A)| \leq \mathbb{E}(|X_{t\wedge\tau} - X_{t\wedge\tau_n}|) \to 0$$

$\{\mathbb{E}(Y|\,\mathcal{G})\,:\,\mathcal{G}\ \sigma$-alg.$\}$ egyenletesen integrálható, ha $Y \in L^1$

- Ha $Z = |\mathbb{E}(Y|\,\mathcal{G})|$, akkor

$$A = \{Z > K\} \in \mathcal{G} \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(A) \le \frac{\mathbb{E}(Z)}{K} \le \frac{\mathbb{E}(|Y|)}{K}$$

- $$\mathbb{E}\big(Z\mathbb{1}_{(Z>K)}\big) \le \mathbb{E}(|Y|\mathbb{1}_A) \le L\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}\big(|Y|\mathbb{1}_{(|Y|>L)}\big) \le \frac{L}{K}\mathbb{E}(|Y|) + \mathbb{E}\big(|Y|\mathbb{1}_{(|Y|>L)}\big)$$

- Legyen L olyan nagy, hogy $\mathbb{E}\big(|Y|\mathbb{1}_{(|Y|>L)}\big) < \varepsilon/2$ és ezután K olyan nagy, hogy $L\mathbb{E}(|Y|)/K < \varepsilon/2$. Ezzel a választással

$$\sup\{\mathbb{E}\big(Z\mathbb{1}_{(Z>K)}\big)\,:\,Z = |\mathbb{E}(Y|\,\mathcal{G})|\ \mathcal{G}\ \sigma\text{-alg.}\} \le \varepsilon$$

Összefoglalás

Definíció (Megállított σ-algebra)

$\mathcal{F}$ filtráció, τ megállási idő $\mathcal{F}$-ben. Jelölés: $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t)$

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0,\, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Tétel

X folytonos trajektóriájú martingál, τ megállási idő az $\mathcal{F}$ filtrációban. Ekkor $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_\tau) = X_{t\wedge\tau}$

Következmény

- *Folytonos trajektóriájú martingál megállításával martingált kapunk.*
- *Folytonos trajektóriájú lokális martingál megállításával lokális martingált kapunk.*
- *Folytonos trajektóriájú lokális martingálok összege lokális martingál.*
- *Folytonos trajektóriájú lokális martingál megállítással korlátos martingállá tehető.*

- Hasonló gondolatmenettel az is megkapható, hogy ha X folytonos trajektóriájú szubmartingál, akkor $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_\tau) \geq X_{t\wedge\tau}$.
- Ha X càdlàg martingál, akkor enyhe plusz feltétel mellett az állítás igaz marad.

Az $\mathcal{F}$ filtráció rögzített. Minden fogalom (megállási idő, martingál, lokális martingál) erre vonatkozik.

Lemma (Alap lemma, bizonyítás később)

X nullából induló, folytonos trajektóriájú, lokális martingál. Ha X korlátos változású, akkor $X \equiv 0$.

Következmény (Szemimartingál felbontás unicitása)

$X = V^{(1)} + M^{(1)} = V^{(2)} + M^{(2)}$, ahol $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ korlátos változású folyamatok és $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ folytonos trajektóriájú, nullából induló, lokális martingál. Ekkor $V^{(1)} = V^{(2)}$ és $M^{(1)} = M^{(2)}$.

$V^{(1)} - V^{(2)} = M^{(2)} - M^{(1)}$ nullából induló folytonos trajektóriájú, lokális martingál, ami korlátos változású, így azonosan nulla

Az $\mathcal{F}$ filtráció rögzített. Minden fogalom (megállási idő, martingál, lokális martingál) erre vonatkozik.

Lemma (Alap lemma, bizonyítás később)

X nullából induló, folytonos trajektóriájú, lokális martingál. Ha X korlátos változású, akkor $X \equiv 0$.

Következmény (Szemimartingál felbontás unicitása)

$X = V^{(1)} + M^{(1)} = V^{(2)} + M^{(2)}$, ahol $V^{(1)}$, $V^{(2)}$ korlátos változású folyamatok és $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ folytonos trajektóriájú, nullából induló, lokális martingál. Ekkor $V^{(1)} = V^{(2)}$ és $M^{(1)} = M^{(2)}$.

Következmény (Felbontás unicitása Itô folyamatokra)

X Itô folyamat az $\mathcal{F}$ filtrációban,

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s^{(1)} ds + \int_0^t \sigma_s^{(1)} dB_s^{(1)} \quad \text{és} \quad X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s^{(2)} ds + \int_0^t \sigma_s^{(2)} dB_s^{(2)}.$$

Ekkor $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$ és $(\sigma^{(1)})^2 = (\sigma^{(2)})^2$ $dt \times d\mathbb{P}$ majdnem mindenütt és $\int_0^t \sigma_s^{(1)} dB_s^{(1)} = \int_0^t \sigma_s^{(2)} dB_s^{(2)}$

Az

$$\mathcal{L}^X = \{\varphi : \varphi \text{ prog. mérhető és } \int_0^t |\varphi_s \mu_s| + \varphi_s^2 \sigma_s^2 ds < \infty \text{ m.b. minden } t\text{-re}\}$$

definícióban X felbontása nem játszik szerepet.

Alap lemma és következményei

Az $\mathcal{F}$ filtráció rögzített. Minden fogalom (megállási idő, martingál, lokális martingál) erre vonatkozik.

Lemma (Alap lemma, bizonyítás később)

X nullából induló, folytonos trajektóriájú, lokális martingál. Ha X korlátos változású, akkor $X \equiv 0$.

Következmény

$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$ Itô folyamat és lokális martingál. Ekkor az időintegrál azonosan nulla, azaz $X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s dB_s$.

- $M_t = X_t - X_0 - \int_0^t \sigma_s B_s = \int_0^t \mu_s ds$,
- M folytonos trajektóriájú, nullából induló lokális martingál.
- $M \equiv 0$ és $X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s dB_s$.

Ha X folytonos trajektóriájú lokális martingál (és Itô folyamat), akkor az X szerinti integrállal kapott folyamat is lokális martingál.

Alap lemma és következményei

Az $\mathcal{F}$ filtráció rögzített. Minden fogalom (megállási idő, martingál, lokális martingál) erre vonatkozik.

Lemma (Alap lemma, bizonyítás később)

X nullából induló, folytonos trajektóriájú, lokális martingál. Ha X korlátos változású, akkor $X \equiv 0$.

Következmény

X Itô folyamat és lokális martingál. Ekkor $[X]$ az az egyetlen nullából induló, adaptált, monoton növő folyamat, amivel $(X_t^2 - [X]_t)_{t \geq 0}$ folytonos trajektóriájú lokális martingál.

- $X_t^2 - [X]_t = X_0^2 + 2\int_0^t X_s dX_s = X_0^2 + 2\int_0^t X_s \sigma_s dB_s$, így $X^2 - [X]$ folytonos trajektóriájú lokális martingál.
- Tegyük fel, hogy $X^2 - V$ folytonos trajektóriájú lokális martingál, ekkor

$$M = (X^2 - [X]) - (X^2 - V) = V - [X]$$

  is folytonos trajektóriájú lokális martingál.
- Ha V monoton nő és nullából indul, akkor $M_0 = 0$ és M korlátos változású, azaz $M \equiv 0$ és $V = [X]$.

Alap lemma bizonyítása korlátos martingálra

Az $\mathcal{F}$ filtráció rögzített. Minden fogalom (megállási idő, martingál, lokális martingál) erre vonatkozik.

Lemma

X nullából induló, folytonos trajektóriájú, korlátos martingál. Ha X korlátos változású, akkor $X \equiv 0$.

- t rögzített $(t_i^{(n)})$ a $[0,t]$ végtelenül finomodó felosztássorozata.
- $$Q_n = \sum_i (X_{t_{i+1}^{(n)}} - X_{t_i^{(n)}})^2 = \sum_i \Delta_i^2, \quad Q_n \xrightarrow{p} [X]_t = 0$$
- M négyzetesen integrálható martingál, növekmények merőlegesek, azaz
$$\mathbb{E}(Q_n) = \mathbb{E}(\textstyle\sum_i \Delta_i^2) = \mathbb{E}((\textstyle\sum_i \Delta_i)^2) - 2\displaystyle\sum_{i<j} \mathbb{E}\big(\mathbb{E}\big(\Delta_i \Delta_j \,\big|\, \mathcal{F}_{t_j}\big)\big) = \mathbb{E}(X_t^2)$$
- Ha $\mathbb{E}(Q_n) \to 0$, akkor $\mathbb{E}(X_t^2) = 0$ és $X_t = 0$.
- $\lim \mathbb{E}(Q_n) = 0$-hoz elég, hogy $\sup_n \mathbb{E}(Q_n^2) < \infty$, mert
$$\mathbb{E}(Q_n) \leq \varepsilon + K\mathbb{P}(\varepsilon \leq Q_n \leq K) + \frac{1}{K} \sup_n \mathbb{E}(Q_n^2) \leq 3\varepsilon, \quad \text{ha } K \text{ és } n \text{ elég nagy.}$$

$\sup_n \mathbb{E}(Q_n^2) < \infty$ I.

- X korlátos $|X| \leq K$, azaz $\Delta_i^2 \leq (2K)^2$
- $$Q_n^2 = (\sum \Delta_i^2)^2 = \sum_i \Delta_i^4 + 2 \sum_{i<j} \Delta_i^2 \Delta_j^2$$
- $$\textstyle\sum_i \Delta_i^4 \leq \max_i \Delta_i^2 \sum_i \Delta_i^2 \leq (2K)^2 \sum_i \Delta_i^2 = (2K)^2 Q_n,$$
- $$\mathbb{E}(\textstyle\sum_i \Delta_i^4) \leq (2K)^2 \mathbb{E}(Q_n) = (2K)^2 \mathbb{E}(X_t^2) \leq 4K^4$$

$\sup_n \mathbb{E}(Q_n^2) < \infty$ II.

- X korlátos $|X| \le K$, azaz $\Delta_i^2 \le (2K)^2$
- $$Q_n^2 = (\sum \Delta_i^2)^2 = \sum_i \Delta_i^4 + 2\sum_{i<j} \Delta_i^2 \Delta_j^2$$
- $$\mathbb{E}(\textstyle\sum_i \Delta_i^4) \le 4K^4.$$
- Ha $i < j < k$, akkor
$$\mathbb{E}(\Delta_i^2 \Delta_j \Delta_k \,|\, \mathcal{F}_{t_k}) = \Delta_i^2 \Delta_j \mathbb{E}(\Delta_k \,|\, \mathcal{F}_{t_k}) = 0,$$
- $$\mathbb{E}\Big(\Delta_i^2 \textstyle\sum_{j>i} \Delta_j^2\Big) = \mathbb{E}\Big(\Delta_i^2 (\sum_{j>i} \Delta_j^2 + 2\sum_{i<j<k} \Delta_j \Delta_k)\Big) = \mathbb{E}\Big(\Delta_i^2 (\sum_{j>i} \Delta_j)^2\Big) \le (2K)^2 \mathbb{E}(\Delta_i^2)$$
- $$\mathbb{E}\left(\sum_{i<j} \Delta_i^2 \Delta_j^2\right) = \sum_i \mathbb{E}\left(\Delta_i^2 \sum_{j>i} \Delta_j^2\right) \le (2K)^2 \sum_i \mathbb{E}(\Delta_i^2) = (2K)^2 \mathbb{E}(Q_n) \le 4K^4$$
- Összerakva
$$\mathbb{E}(Q_n^2) \le 3 \cdot 4K^4$$

Alap lemma bizonyítása

Lemma

X nullából induló, folytonos trajektóriájú, lokális martingál. Ha X korlátos változású, akkor $X \equiv 0$.

- Legyen $\tau = \inf\{t \geq 0 \,:\, |X_t| \geq 1\}$.
- $M = X_{t\wedge\tau}$ korlátos martingál.
- M korlátos változású $0 \leq V^M \leq V^X = 0$
- $M \equiv 0$.
- $M_t = X_{t\wedge\tau} = 0$, és

$$0 = \lim_{t\to\infty} M_t \mathbb{1}_{(\tau<\infty)} = \lim_{t\to\infty} X_{t\wedge\tau}\mathbb{1}_{(\tau<\infty)} = \mathbb{1}_{(\tau<\infty)}$$

- $\tau = \infty$ és $X \equiv 0$.

Lévy karakterizáció I.

Tétel

X nullából induló, folytonos trajektóriájú lokális martingál $\mathcal{F}$-ben.

X pontosan akkor Brown mozgás $\mathcal{F}$-ben, ha $[X]_t = t$ minden t-re.

Megjegyzés. Csak arra az esetre látjuk be, ha $X = \sum_j X^{(j)}$, ahol $X^{(j)}$ Itô folyamat $\mathcal{F}$-ben $i = 1, \dots, d$.

- Brown mozgás kvadratikus variációja az idő. Csak a másik irány érdekes.
- $$f : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R} \quad f(t,x) = f(t, x_1, \dots, x_d) = \exp\left\{ i\alpha \textstyle\sum_j x_j + \frac{1}{2}\alpha^2 t \right\}$$
- $$\partial_t f = \frac{1}{2}\alpha^2 f, \quad \partial_{x_j} f = i\alpha f, \quad \partial_{x_j, x_k} f = -\alpha^2 f$$
- $M_t = f(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(d)})$ fejlődése

$$M_t = M_0 + \int_0^t \frac{1}{2}\alpha^2 M_s ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t i\alpha M_s dX_s^{(j)} + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \int_0^t -\alpha^2 M_s d\left[X^{(j)}, X^{(k)}\right]_s = M_0 + \sum_{j=1}^d \int_0^t i\alpha M_s dX_s^{(j)}$$

Lévy karakterizáció II.

Tétel

X nullából induló, folytonos trajektóriájú lokális martingál $\mathcal{F}$-ben.

X pontosan akkor Brown mozgás $\mathcal{F}$-ben, ha $[X]_t = t$ minden t-re.

Megjegyzés. Csak arra az esetre látjuk be, ha $X = \sum_j X^{(j)}$, ahol $X^{(j)}$ Itô folyamat $\mathcal{F}$-ben $i = 1, \dots, d$.

- $M_t = \exp\left\{i\alpha X_t + \frac{\alpha^2}{2} t\right\}$, $X = \sum_j X^{(j)}$.
- Ha $[X]_t = t$, akkor

$$M_t = 1 + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t i\alpha M_s dX_s^{(j)}$$

- Ha X lokális martingál, akkor az alap lemma miatt

$$X_t = \int_0^t \sum_j \mu_s^{(j)} ds + \sum_j \int_0^t \sigma_s^{(j)} dB_s^{(j)} = \sum_j \int_0^t \sigma_s^{(j)} dB_s^{(j)} \quad \Longrightarrow \quad M \text{ lokális martingál.}$$

Lévy karakterizáció III.

Tétel

X nullából induló, folytonos trajektóriájú lokális martingál $\mathcal{F}$-ben.

X pontosan akkor Brown mozgás $\mathcal{F}$-ben, ha $[X]_t = t$ minden t-re.

Emlékeztető.

Tétel (Martingál karakterizáció)

X nullából induló, folytonos trajektóriájú, $\mathcal{F}$–adaptált folyamat.

X pontosan akkor BM $\mathcal{F}$-ben, ha $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\left(\exp\{i\alpha X_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t\}\right)_{t\geq 0}$ lokális martingál.

- $M_t = \exp\left\{i\alpha X_t + \frac{\alpha^2}{2}t\right\}$, M lokális martingál.
- $(M_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ korlátos, mert $|M_{t\wedge T}| \leq \exp\{\frac{1}{2}\alpha^2 T\}$
- $(M_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ korlátos lokális martingál, vagyis martingál.
- $s \leq t \leq T$-re
$$\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_{t\wedge T} \mid \mathcal{F}_s) = M_{s\wedge T} = M_s$$
- M martingál, tetszőleges α esetén, azaz X Brown mozgás.

Tükrözési elv

Tétel

B Brown mozgás, τ megállási idő $\mathcal{F}$-ben. $X_t = B_{t\wedge\tau} - (B_t - B_{t\wedge\tau}) = 2B_{t\wedge\tau} - B_t$.

X Brown mozgás $\mathcal{F}$-ben.

- $$B_{t\wedge\tau} = \int_0^t \mathbb{1}_{(s\leq\tau)} dB_s$$
- $$X_t = \int_0^t 2\mathbb{1}_{(s\leq\tau)} - 1 dB_s$$
- $$[X]_t = \int_0^t (2\mathbb{1}_{(s\leq\tau)} - 1)^2 ds = t$$
- Azaz X nullából, induló folytonos trajektóriájú lokális martingál, $[X]_t = t$.
- Lévy karakterizáció alapján X Brown mozgás.

Futó maximum eloszlása tükrözési elvvel

Állítás

B Brown mozgás, $S_t = \max_{u \le t} B_u$. Ekkor $S_t \stackrel{d}{=} |B_t|$.

- Legyen $y > 0$ és $\tau = \inf\{t \ge 0 \,:\, B_t = y\}$, $X_t = 2B_{t\wedge\tau} - B_t$.
- τ megállási idő, X Brown mozgás a tükrözési elv alapján.
- $t > 0$
$$\{S_t \ge y\} = \{\tau \le t\} = \{\tau \le t,\, B_t \ge y\} \cup \{\tau \le t,\, B_t \le y\}$$
- $$\{\tau \le t,\, B_t \ge y\} = \{B_t \ge y\}$$
- $$\{\tau \le t,\, B_t \le y\} = \{\tau \le t,\, 2y - B_t \ge y\} = \{\tau \le t,\, X_t \ge y\} = \{X_t \ge y\}$$
- $$\mathbb{P}(S_t \ge y) = \mathbb{P}(B_t \ge y) + \mathbb{P}(X_t \ge y) = 2\mathbb{P}(B_t \ge y) = \mathbb{P}(|B_t| \ge y)$$